Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

27. September 2000

Modulklausur Höhere Mathematik I

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Die stetigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(3) = f(-3)$ bilden einen Vektorraum.

2) *Richtig oder falsch:* Eine $n \times n$-Matrix A mit $A^2 = 0$ hat Determinante null.

3) *Richtig oder falsch:* Wenn die Niveaulinien einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ konzentrische Kreise (oder deren Mittelpunkt) sind, hängt die Funktion, in Polarkoordinaten geschrieben, nur vom Radius r ab.

4) Was ist $\iiint_{\mathcal{K}} x\,dx\,dy\,dz$ für $\mathcal{K} = \bigl\{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 \bigm| |x| \le 3 \land y^2 + z^2 \le 100\bigr\}$?

5) Was ist $\operatorname{div}\operatorname{rot}\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$?

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 3 \\ x + ay + 3z &= 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*
Der $\mathbb{R}$-Vektorraum V sei erzeugt von den Funktionen $1, \sin x, \cos x, \sin^2 x, \sin x \cos x, \cos^2 x$.

a) Bestimmen Sie eine Basis von V!

b) Zeigen Sie: Die Vorschrift $f \mapsto f'' + 4f$ definiert eine lineare Abbildung $V \to V$.

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser linearen Abbildung bezüglich der in *a)* gefundenen Basis!

d) Bestimmen Sie die Dimensionen von Kern und Bild dieser linearen Abbildung!

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Punkte (x, y) mit $x^2 + y^2 \le 1$, in denen der Gradient von $f(x, y) = \sin^2(x + y) + \cos^2(x - y)$ der Nullvektor ist!

b) Berechnen Sie Δf !

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Beschreiben Sie die Kurve $\gamma\colon [0, 10\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = \bigl(\cos(t), \sin(t), t\bigr)$ geometrisch!

b) Berechnen Sie die Bogenlänge von γ !

Steht Ihr Name auf jedem Blatt?