WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

D7,27, ZIMMER 401

Themenvorschläge zu den kleinen Übungen am 20. Juli 2000

a) Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ hänge, in Polarkoordinaten (r, φ) geschrieben, nur ab von φ. Wie sehen die Niveaulinien von f aus?

b) Die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ hänge, in Kugelkoordinaten (r, φ, ϑ) geschrieben, nur ab von ϑ. Wie sehen die Niveauflächen von f aus?

$$f(x,y) = \cos(x^2+y^2) + \sin(x^2+y^2)\,!$$

c) Was ist Δf für die Funktion

$$f(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ?$$

d) Berechnen Sie die Bogenlänge der Parabel $y = x^2$ zwischen den beiden Punkten $(0,0)$ und $(2,4)$!

e) Berechnen Sie die Länge der Kurve $y = \sinh\frac{x}{a}$ über dem Intervall $[-c, c]$!

f) Auf der Kugel mit Radius R und Kugelkoordinaten (r, φ, ϑ) bezeichnet man die Kurven $\gamma_1: \varphi \mapsto (R, \varphi, \vartheta)$ als Breitenkreise. Berechnen Sie die Bogenlänge des Breitenkreises durch die Punkte $(\pm 3, 0, 4)$ der Kugel mit Radius 5 um den Nullpunkt zwischen diesen beiden Punkten!

g) Geben Sie denjenigen Kreis durch $(\pm 3, 0, 4)$ an, dessen Mittelpunkt der Kugelmittelpunkt ist, und berechnen Sie seine Länge zwischen den beiden Punkten!

h) Das Vektorfeld $\vec{V}$ sei gegeben durch

$$\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die Wege $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ durch

$$\gamma_1: \begin{cases} [0, 20\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad t \mapsto (\cos t, \sin t, t) \end{cases}, \quad \gamma_2: \begin{cases} [0, 20\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad t \mapsto (1, 0, t) \end{cases}$$

und

$$\gamma_3: \begin{cases} [0, 20\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad t \mapsto \begin{cases} (\cos 2t, \sin 2t, 0) & \text{falls } t \le 10\pi \\ \big(1, 0, 2(t - 10\pi)\big) & \text{falls } t \ge 10\pi \end{cases} \end{cases}.$$

Berechnen Sie die Integrale von $\vec{V}$ längs der γ_i! Ist das Vektorfeld $\vec{V}$ konservativ?