Wolfgang K. Seiler — D7,27, Zimmer 401
Tel. 2515

Themenvorschläge zu den kleinen Übungen am 13. Juli 2000

a) Was sind die Divergenz und die Rotation der linearen Funktion

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} a_0 + a_1x + a_2y + a_3z \\ b_0 + b_1x + b_2y + b_3z \\ c_0 + c_1x + c_2y + c_3z \end{pmatrix}\ ?$$

b) Berechnen Sie

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} e^{-(x^2+y^2+z^2)}\ !$$

c) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfelds

$$V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} -y^2 - z^2 \\ -x^2 - z^2 \\ -x^2 - y^2 \end{pmatrix}\ !$$

d) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ hänge, in Polarkoordinaten (r,φ) geschrieben, nur ab von φ. Wie sehen die Niveaulinien von f aus?

e) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ hänge, in Kugelkoordinaten (r,φ,ϑ) geschrieben, nur ab von ϑ. Wie sehen die Niveauflächen von f aus?

f) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfelds

$$\vec{V}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} yz^2 \\ x^2z \\ xy^2 \end{pmatrix}\ !$$

g) Das Vektorfeld $\vec{V}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ordne dem Punkt mit Polarkoordinaten (r,φ) den Vektor $\binom{-\sin\varphi}{\cos\varphi}$ aus $\mathbb{R}^2$ zu. Zeigen Sie, daß dieser Vektor in jedem Punkt (x,y) senkrecht auf dem Ortsvektor $\binom{x}{y}$ steht!

h) Auf der Kugel mit Radius R und Kugelkoordinaten (r,φ,ϑ) bezeichnet man die Kurven $\gamma_1\colon \varphi \mapsto (R,\varphi,\vartheta)$ als Breitenkreise und die Kurven $\gamma_2\colon \vartheta \mapsto (R,\varphi,\vartheta)$ als Längengrade. Berechnen Sie die Tangentenvektoren an beide Kurven!

i) Bestimmen Sie, durch Übergang zu Polarkoordinaten, alle relativen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = \cos(x^2+y^2) + \sin(x^2+y^2)\ !$$

j) Was ist Δf für die Funktion

$$f(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ?$$

k) Für welche $a > 0$ ist

$$\Delta\left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^a}\right) = 0\ ?$$