Wolfgang K. Seiler — D7,27, Zimmer 401
Tel. 2515

Themenvorschläge zu den kleinen Übungen am 6. Juli 2000

a) Berechnen Sie die Hesse-Matrizen der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} f_1&:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; && (x,y,z) \mapsto x^3+y^3+z^3+3xyz \\ f_2&:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; && (x,y) \mapsto \sin x \cos y \\ f_3&:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; && (x,y) \mapsto e^{x^2+y^2} \\ f_4&:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; && (x,y) \mapsto \arctan x + y \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie die vollständige Taylor-Reihe von f_1 um den Punkt $(0,0,0)$!

c) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades von f_1 um den Punkt $(1,0,0)$!

d) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades von f_1 bis f_4 um den Nullpunkt!

e) Unter dem Einfluß eines Kraftfelds bewegt sich eine Kugel so durch den $\mathbb{R}^3$, daß sie sich zur Zeit t im Punkt $\left(5\cos\frac{t}{10}, 10\sin\frac{t}{10}, \frac{t}{2}\right)$ befindet. Beschreiben Sie die Bahn der Kugel geometrisch und berechnen Sie Betrag und Richtung ihrer Geschwindigkeit zur Zeit t!

f) Die Bewegungsenergie E_{kin} ist bekanntlich gleich $\frac{mv^2}{2}$, wobei m die Masse der Kugel ist und v ihre Geschwindigkeit. Berechnen Sie die Ableitung von E_{kin} nach der Zeit!

g) In welchen Punkten kann die Gleichung $x^y = y^x$ im Bereich $x, y > 0$ eindeutig nach y aufgelöst werden? Bestimmen Sie dort den Wert von $y'(x)$!

h) $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ sei das Kraftfeld einer Punktladung Q, die im Nullpunkt des Koordinatensystems sitzt. Eine Ladung q der Masse m bewege sich auf der Geraden $x = y = 1$. Welche Beschleunigung erfährt diese Ladung in ihrer Bewegungsrichtung?

i) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix des Vektorfelds

$$\vec{V}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ yz+xz+xy \\ xyz \end{pmatrix} !$$

j) Bestimmen Sie die Divergenz von $\vec{V}$!

k) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix des Vektorfelds

$$\vec{W}: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3; \quad (x,y,z) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} !$$

l) Bestimmen Sie die Divergenz von $\vec{W}$!