Wolfgang K. Seiler — D7,27, Zimmer 401
Tel. 2515

Themenvorschläge zu den kleinen Übungen am 29. Juni 2000

a) A sei die Menge aller reeller Polynome vom Grad höchstens fünf, die an der Stelle null den Wert eins annehmen. Machen Sie A zu einem affinen Raum und bestimmen Sie dessen Dimension!

b) Der affine Unterraum A des $\mathbb{R}^5$ sei gegeben als Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$u+v+w+x+y=2, \quad u-v+w-x+y=4 \quad \text{und} \quad v+x=-1\,.$$

Bestimmen Sie die Dimension von A und geben Sie A als Punktmenge an!

c) Der affine Unterraum B des $\mathbb{R}^5$ sei als Punktmenge

$$\left\{ (0,0,1,0,0)+\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

gegeben. Finden Sie ein lineares Gleichungssystem mit Lösungsmenge B, und bestimmen Sie die Dimension von B.

d) Berechnen Sie den Durchschnitt der Unterräume A und B aus den beiden vorigen Aufgaben!

e) Wird durch $\|(x,y)\| \underset{\text{def}}{=} x^2+y^2$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ definiert?

f) Welche der Punktfolgen (x_n,y_n) aus $\mathbb{R}^2$ ist konvergent und wohin konvergiert sie?
1) $(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{1+n^2},\frac{1}{n^3}\right)$, *2)* $(x_n,y_n)=\left((-1)^n,\frac{1}{n}\right)$, *3)* $(x_n,y_n)=\left(e^{-n},\cos(e^{-n^2})\right)$

g) Was können Sie über eine Funktion $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sagen, deren Niveaulinien konzentrische Kreise um den Nullpunkt sowie die nur aus dem Nullpunkt bestehende Menge sind?

h) Beschreiben Sie den Graphen der Funktion $f(x,y)=5-\sqrt{x^2+y^2}$ geometrisch!

i) Wo ist die Funktion aus der letzten Aufgabe stetig? Wo ist sie differenzierbar?

j) Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen nach x,y und z, und bestimmen Sie den Gradienten überall dort, wo er existiert!

$$\begin{aligned}
f(x,y,z)&=x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2z+z^2x+xyz\\
g(x,y,z)&=e^{x^2+y^2+z^2}\cdot\cos(xy)\\
h(x,y,z)&=\frac{x+y}{x-z}\\
k(x,y,z)&=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\
\ell(x,y,z)&=ax+by+cz+d
\end{aligned}$$