Wolfgang K. Seiler — D7,27, Zimmer 401
Tel. 2515

Themenvorschläge zu den kleinen Übungen am 25. Mai 2000

a) Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ die Produkte AB und BA!

b) Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl n ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$.

c) Gilt diese Formel auch für $n = -1$?

d) Welche der folgenden Matrizen sind invertierbar?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e) Welche Dimension hat das Bild der linearen Abbildung $\varphi_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit Abbildungsmatrix A_i?

f) Berechnen Sie die komplexen Zahlen $(1+i)(1-2i)$, $(1+i)^2$, $(1+i)^{20}$, $\dfrac{1+i}{1-i}$, $\dfrac{1-i}{1+i}$.

g) Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$x - y - z + u = 0, \quad x + y - z = 0, \quad 3x + 2y - z - u = 0 \quad \text{und} \quad 2x + 3y - 2u = 0\,!$$

Ist die Lösungsmenge ein Vektorraum?

h) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$2x - y + az = a, \quad 2ax + y - 2z = 0 \quad \text{und} \quad 2x + ay - 2z = 0\,!$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Lösungsmenge ein Vektorraum?

i) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des zu diesem Gleichungssystem gehörenden homogenen Gleichungssystems! Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist dessen Lösungsmenge ein Vektorraum?