Wolfgang K. Seiler — D7,27, Zimmer 401
Tel. 2515

Themenvorschläge zu den kleinen Übungen am 11. Mai 2000

a) Welche der folgenden Mengen sind $\mathbb{R}$-Vektorräume?

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}, \qquad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+1 \\ x+2 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}, \qquad V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, xy = 0 \right\},$$

$$V_5 = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,\middle|\, f'(2) = 0 \right\}, \qquad V_6 = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,\middle|\, f'(2) = 2 \right\}$$

b) Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y \\ y+2z \\ z+2 \end{pmatrix}, \qquad \psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 2x+3y+4z \\ 3x+4y+5z \end{pmatrix},$$

$$\omega\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ xy+yz+xz \\ xyz \end{pmatrix}$$

c) Bestimmen Sie im linearen Fall Kern und Bild der Abbildung!

d) Welche Dimension hat der Vektorraum

$$W = \left\{ a\sin^2 t + b\cos^2 t + c \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})\ ?$$

e) Betrachten Sie für diesen Vektorraum W die lineare Abbildung

$$\varphi\colon W \to \mathbb{R}^3;\quad f \mapsto \begin{pmatrix} f(0) \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ f(\pi) \end{pmatrix}.$$

Ist diese Abbildung injektiv? surjektiv?

f) Welche der folgenden Mengen sind linear unabhängig?

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3, \qquad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$M_3 = \left\{ \sin t, t, t^2 \right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \qquad M_4 = \left\{ e^t, e^{2t}, e^{3t} \right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

$$M_5 = \left\{ e^t, e^{t+1}, e^{t+2} \right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \qquad M_6 = \left\{ e^t, \sinh t, \cosh t \right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$