WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

D7,27, ZIMMER 401

19. Mai 2000

3. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Ist $n = \dim V$ größer als $m = \dim W$, hat jede lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ einen mindestens $(n-m)$-dimensionalen Kern.

2) *Richtig oder falsch:* Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $p, q \in \mathbb{N}$ ist $A^p \cdot A^q = A^q \cdot A^p$.

3) *Richtig oder falsch:* Für $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

4) *Richtig oder falsch:* Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei A^2 die Nullmatrix. Dann ist auch A gleich der Nullmatrix.

5) *Richtig oder falsch:* Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei $A^2 = A$. Dann ist A entweder die Einheitsmatrix oder die Nullmatrix.

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*
Sei $V = \left\{\alpha e^{-2t} + \beta e^{-t} + \gamma + \delta e^{t} + \varepsilon e^{2t} \;\middle|\; \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}\right\}$

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung

$$\varphi\colon V \to V; \quad f \mapsto \ddot{f} = \frac{d^2 f}{dt^2}\,!$$

b) Bestimmen Sie Basen von Kern und Bild dieser Abbildung!

c) Zeigen Sie: Jedes Element $f \in V$ läßt sich auf genau eine Weise schreiben als $f = g + h$ mit $g \in \operatorname{Kern} \varphi$ und $h \in \operatorname{Bild} \varphi$!

Aufgabe 2: (*5 Punkte)*
Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B_n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 + n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $n \in \mathbb{Z}$.

a) Zeigen Sie: Für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ ist $B_n \cdot B_m = B_{n+m}$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $A^n = B_n$.

c) A ist invertierbar und $A^{-1} = B_{-1}$.

d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $A^{-n} \underset{\text{def}}{=} \left(A^{-1}\right)^n = B_{-n}$.

Aufgabe 3: (*5 Punkte)*
Bestimmen Sie Basen von Kern und Bild der linearen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}\,!$$

Abgabe bis zum Freitag, dem 26. Mai 2000, um 12.00 Uhr