WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

D7,27, ZIMMER 401

12. Mai 2000

2. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

$\varphi\colon V \to W$ sei eine lineare Abbildung und $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ sei eine Teilmenge von V.

1) Richtig oder falsch: Ist $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ linear unabhängig, so auch $\{\varphi(\vec{v}_1), \dots, \varphi(\vec{v}_n)\}$.

2) Richtig oder falsch: Ist $\{\varphi(\vec{v}_1), \dots, \varphi(\vec{v}_n)\}$ linear unabhängig, so auch $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$.

3) Richtig oder falsch: $\mathcal{B}$ sei eine Basis des Vektorraums V und $M \subset B$ sei eine Teilmenge von $\mathcal{B}$. Dann ist M eine Basis von $[M]$.

4) Zeigen Sie: Der Durchschnitt zweier Untervektorräume eines Vektorraums V ist wieder ein Untervektorraum.

5) Richtig oder falsch: Sind U_1 und U_2 Untervektorräume von V, so gibt es Basen $\mathcal{B}_1$ von U_1 und $\mathcal{B}_2$ von U_2 derart, daß $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ Basis von $U_1 \cap U_2$ ist.

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß die beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind!

b) Finden Sie drei Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$, so daß gilt

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; ax + by + cz = 0 \right\} !$$

c) Welche Bedingung müsen die drei Komponenten einen Vektors $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ erfüllen, damit $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist?

Aufgabe 2: (*5 Punkte)*

a) Welche Dimension hat der Vektorraum $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y + 3z = 0 \right\} \le \mathbb{R}^3$?

b) Bestimmen Sie eine Basis von U!

c) Ergänzen Sie diese Basis zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$!

Aufgabe 3: (*5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie eine Basis des Untervektorraums

$$U = \left[\sinh t, \cosh t, \sinh^2 t, \cosh^2 t, e^{-2t}, e^{-t}, 1, e^t, e^{2t}\right] \le \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) !$$

b) Zeigen Sie: Das Bild der linearen Abbildung $\varphi\colon U \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R});\ f \mapsto \frac{df}{dt}$ liegt in U.

c) Das Bild von φ ist U.

Abgabe bis zum Freitag, dem 19. Mai 2000, um 12.00 Uhr