WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

D7,27, ZIMMER 401

28. Juli 2000

12. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Was ist das (dreidimensionale) Volumen von $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 100,\ |z| = 1\}$?

2) Richtig oder falsch: Das Vektorfeld $\vec{V}(x,y) = \binom{y/(x^2+y^2)}{-x/(x^2+y^2)}$ hat eine Stammfunktion.

3) Richtig oder falsch: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|+|y| \geq 1\}$ ist einfach zusammenhängend.

4) Richtig oder falsch: Die Oberfläche einer Kugel ist einfach zusammenhängend.

5) Richtig oder falsch: Die Oberfläche eines Torus ist einfach zusammenhängend.

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Integrieren Sie das Vektorfeld $\vec{V}(x,y) = \binom{y^2}{x^2}$ längs des Dreiecks mit Ecken $(1,0)$, $(1,1)$ und $(0,0)$!

b) Integrieren Sie das Vektorfeld $\vec{W}(x,y) = \binom{x^2y}{xy^2}$ längs des Teilbogens des Einheitskreises, der den Punkt $(1,0)$ im Gegenuhrzeigersinn mit $(0,1)$ verbindet!

c) Ditto für den Uhrzeigersinn.

d) Ist eines der beiden Vektorfelder $\vec{V}, \vec{W}$ konservativ?

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Integrieren Sie das Vektorfeld $\vec{V}(x,y) = \binom{y^2}{-x}$ nach dem Satz von GREEN entlang des Dreiecks mit Ecken $(0,0)$, $(0,1)$ und $(1,0)$!

b) Berechnen Sie nach dem Satz von GAUSS das Integral $\iint_S \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x \end{pmatrix} d\vec{O}$ mit $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = z,\ 0 \leq z \leq 1\}$!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Das MÖBIUSband kann als Flächenstück B dargestellt werden durch

$$f\colon D = [0,1] \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^3; \quad (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} (2+u\cos v)\cos 2v \\ (2+u\cos v)\sin 2v \\ u\sin v \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Randkurve γ von B !

b) Berechnen Sie für $\vec{V}(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ das Integral $\int_\gamma \vec{V}\,ds$!

c) Berechnen Sie $\iint_B \operatorname{rot}\vec{V}\,d\vec{O} = \iint_D \operatorname{rot}\vec{V} \cdot (f_u \times f_v)\,du\,dv$!

d) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus *b)* und *c)* mit der Aussage des Satzes von STOKES!

KEINE ABGABE -- FROHE FERIEN !