Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

D7,27, Zimmer 401

15. Juli 2000

Klausur und 11. Übungsblatt Höhere Mathematik I

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •
• • • Beantworten Sie alle *Fragen* auf demselben Blatt, • • •
• • • verwenden Sie aber bitte für jede *Aufgabe* ein eigenes Blatt, • • •
• • • da sich sonst die Korrektur für alle Teilnehmer verzögern wird. • • •

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Ist $\dim V > \dim W$, so ist jede lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ surjektiv.

Lösung: Das ist natürlich Unsinn: Beispielsweise ist die Nullabbildung nie surjektiv, falls W nicht gerade der Nullraum ist.

2) Richtig oder falsch: Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei $A^2 = A$. Dann ist A entweder die Einheitsmatrix oder die Nullmatrix.

Lösung: Auch beispielsweise für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist $A^2 = A$, also *falsch.*

3) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Einheitsmatrix E!

Lösung: Hier ist natürlich $L = R = E$, denn E ist sowohl untere als auch obere Dreiecksmatrix und hat lauter Einsen in der Hauptdiagonalen.

4) Richtig oder falsch: Es gibt genau eine reelle Zahl x, so daß $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 128 & x & 8 \\ 64 & 32 & 16 \end{vmatrix} = 256$ ist.

Lösung: *Richtig,* denn $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 128 & x & 8 \\ 64 & 32 & 16 \end{vmatrix}$ ist eine lineare Funktion von x; da der Koeffizient von x wegen $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 61 & 16 \end{vmatrix} = 16 - 64$ nicht verschwindet, gibt es genau ein x, für das sie den Wert 256 annimmt.

5) Finden Sie zwei affine Ebenen im $\mathbb{R}^4$, die sich in genau einem Punkt schneiden!

Lösung: Sind x, y, z, w die vier Koordinaten, so schneiden sich die (x, y)-Ebene und die (z, w)-Ebene genau im Nullpunkt.

6) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ hänge, in Polarkoordinaten geschrieben, nicht von der Winkelkoordinate φ ab. Was können Sie über die Niveaulinien von f sagen?

Lösung: Die Niveaulinien sind allesamt Vereinigungen von Kreisen.

7) Die JACOBI-Matrix von $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei für jeden Punkt des $\mathbb{R}^n$ eine Diagonalmatrix. Was können Sie über f sagen?

Lösung: Da $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$ ist, kann f_i nur von x_i abhängen, nicht aber von den anderen x_j. Somit ist

$$f(x_1, x, \ldots, x_n) = \big(f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)\big) .$$

8) Was ist $\operatorname{rot}\begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z-x \end{pmatrix}$?

Lösung: $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(z-x) - \frac{\partial}{\partial z}(y-z) \\ \frac{\partial}{\partial z}(x-y) - \frac{\partial}{\partial x}(z-x) \\ \frac{\partial}{\partial x}(y-z) - \frac{\partial}{\partial y}(x-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 1: *(7 Punkte)*
V sei der von $\{1, \sin x, \cos x, \sin x + \cos x, \sin^2 x, \cos^2 x, (\sin x + \cos x)^2\}$ erzeugte Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

a) Bestimmen Sie eine Basis von V und berechnen Sie $\dim V$!

b) Zeigen Sie: Die Differentiation definiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon \begin{cases} V \to V \\ f \mapsto f' \end{cases}$!

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ!

d) Bestimmen Sie eine Basis des Bilds von φ!

e) Welche Dimension hat der Kern von φ?

Lösung:

a) $\sin x + \cos x$ ist zur Erzeugung überflüssig, wenn bereits $\sin x$ und $\cos x$ im Erzeugendensystem sind. Wegen der Beziehung

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

ist auch von den drei Funktionen $\sin^2 x, \cos^2 x$ und 1 eine überflüssig, etwa $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Wegen

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos 2$$

kann außerdem die letzte Funktion ersetzt werden durch die einfachere Funktion $\sin x \cos x$; V wird also auch erzeugt von der Menge

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin^2 x, \sin x \cos x\} .$$

Für eine Linearkombination

$$\lambda_1 + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos x + \lambda_4 \sin^2 x + \lambda_5 \sin x \cos x = 0$$

zeigt Einsetzen von $x = 0$, daß

$$\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda_3 = -\lambda_1$$

ist. Einsetzen von $x = \pi/2$ zeigt, daß

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0$$

ist; für $x = -\pi/2$ folgt entsprechend

$$\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 = 0 .$$

Damit ist $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_4 = -\lambda_1$; die Beziehung hat sich also vereinfacht zu

$$\lambda_1(1 - \cos x - \sin^2 x) + \lambda_5 \sin x \cos x = 0 .$$

Damit muß aber $\lambda_1 = \lambda_5 = 0$ sein, denn $\sin x \cos x$ hat Periode π, während

$$1 - \cos x - \sin^2 x = \cos^2 x - \cos x = \cos x(1 - \cos x)$$

Periode 2π hat, so daß diese beiden Funktionen nicht proportional sein können.
Dies zeigt, daß $\{1, \sin x, \cos x, \sin^2 x, \sin x \cos x\}$ linear unabhängig und somit eine Basis von V ist. Die Dimension von V ist also fünf.

b) Differentiation ist immer linear; es geht also nur darum, daß die Ableitung einer jeden Funktion aus V wieder in V liegt. Das ist der Fall, denn

$$\frac{d}{dx}1 = 0, \quad \frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$
$$\frac{d}{dx}\sin^2 x = 2\sin x \cos x \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx}\sin x \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x .$$

c) In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Bilder der Basisvektoren, ausgedrückt durch ihre Koeffizienten. Also ist die Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

d) Das Bild wird erzeugt von den vier Funktionen $\cos x$, $\sin x$, $\sin x \cos x$ und $1-\sin^2 x$. Wären diese linear abhängig, wären es auch die Funktionen aus der Basis von V, also bilden diese vier Funktionen eine Basis.

e) Nach der Dimensionsformel ist $\dim \operatorname{Kern} \varphi + \dim \operatorname{Bild} \varphi = \dim V = 5$, also hat der Kern von φ die Dimension $5 - 4 = 1$.

Aufgabe 2: *(7 Punkte)*
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & - & 3w & = & 0 \\ -x & - & ay & + & (2a+1)z & - & 7aw & = & 6 \\ 3x & - & 3y & + & 2z & - & 6w & = & -1 \\ & & (2a+2)y & - & 3z & + & (a+6)w & = & 2a-5 \end{array}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$!

Lösung: Addition der ersten Gleichung zur zweiten und dreifache Subtraktion der ersten Gleichung von der dritten bringt das Gleichungssystem auf die Form

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & - & 3w & = & 0 \\ & - & (a+1)y & + & (2a+2)z & - & (7a+3)w & = & 6 \\ & & & & -z & + & 3w & = & -1 \\ & & (2a+2)y & - & 3z & + & (a+6)w & = & 2a-5 \end{array}$$

Addition von zweimal der zweiten Gleichung zur vierten vereinfacht es weiter zu

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & - & 3w & = & 0 \\ & - & (a+1)y & + & (2a+2)z & - & (7a+3)w & = & 6 \\ & & & & -z & + & 3w & = & -1 \\ & & & & (4a+1)z & - & 13aw & = & 2a+7 \end{array}$$

Addition von $(4a+1)$ mal der dritten Gleichung zur vierten führt auf die Treppengestalt

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & z & - & 3w & = & 0 \\ & - & (a+1)y & + & (2a+2)z & - & (7a+3)w & = & 6 \\ & & & & -z & + & 3w & = & -1 \\ & & & & & & (3-a)w & = & 6-2a \end{array}$$

Für $a=3$ wird die letzte Gleichung zu $0w=0$, stellt also keine Bedingung an w; für alle anderen Werte von a ist

$$w = \frac{6-2a}{3-a} = 2\,.$$

Nach der dritten Gleichung ist

$$z = 3w+1\,,$$

was für $a \neq 3$ gleich 7 ist. Die zweite Gleichung wir für $a \neq 3$ zu

$$-(a+1)y + 14a + 14 - 14a - 6 = 6$$

oder

$$-(a+1)y = -2\,.$$

Die ist für $a=-1$ unlösbar, ansonsten ist

$$y = \frac{2}{a+1}\,.$$

Für $a=3$ ist die zweite Gleichung

$$-4y + 8(3w+1) - 24w = 6 \quad \text{oder} \quad -4y = -2\,,$$

d.h. $y = 1/2$. Schließlich zeigt noch die erste Gleichung, daß

$$x = y - z + 3w = y - (3w+1) + 3w = y - 1 = \begin{cases} \frac{1-a}{1+a} & \text{für } a \neq -1, 3 \\ -\frac{1}{2} & \text{für } a = 3 \end{cases}$$

ist. Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems ist also

$$\mathbb{L}_a = \begin{cases} \emptyset & \text{für } a = -1 \\ \left\{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3\lambda+1, \lambda\right) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\} & \text{für } a = \ \ 3 \\ \left\{\left(\frac{1-a}{1+a}, \frac{2}{a+1}, 7, 2\right)\right\} & \text{für } a \neq -1, 3 \end{cases}.$$

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)
Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die vier Vektoren $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5\\6\\7\\x\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}8\\9\\0\\x\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\2\\x\\4\end{pmatrix}$ linear unabhängig?

Lösung: Die vier Vektoren sind genau dann linear *abhängig,* wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 & 1 \\ 2 & 6 & 9 & 2 \\ 3 & 7 & 0 & x \\ 4 & x & x & 4 \end{vmatrix}$$

verschwindet. Subtraktion der vierten von der ersten Spalte zeigt, daß

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 & 1 \\ 2 & 6 & 9 & 2 \\ 3 & 7 & 0 & x \\ 4 & x & x & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 6 & 9 & 2 \\ 3-x & 7 & 0 & x \\ 0 & x & x & 4 \end{vmatrix} = (3-x) \begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 6 & 9 & 2 \\ x & x & 4 \end{vmatrix}$$

ist. Subtraktion der ersten Spalte von der zweiten zeigt, daß

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 6 & 9 & 2 \\ x & x & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ x & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \\ x & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3(20 + 2x - x - 24) = 3(x - 4)$$

ist, d.h.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 & 1 \\ 2 & 6 & 9 & 2 \\ 3 & 7 & 0 & x \\ 4 & x & x & 4 \end{vmatrix} = 3(3 - x)(x - 4)$$

verschwindet genau dann, wenn $x = 3$ oder $x = 4$ ist; für

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{3, 4\}$$

sind die vier Vektoren linear unabhängig.

Aufgabe 4: (*6 Punkte*)

a) Zeigen Sie, daß die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystem

$$x + y + z + w = 6 \quad \text{und} \quad x - y + z - w = 0$$

eine Ebene im vierdimensionalen affinen Raum $\mathbb{R}^4$ ist!

b) Berechnen Sie den Durchschnitt dieser Ebene mit dem affinen Unterraum

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \; !$$

c) Bestimmen Sie den affinen Unterraum des $\mathbb{R}^4$, den diese beiden Ebenen aufspannen!

Lösung:

a) Da die linken Seiten der beiden Gleichungen linear unabhängig sind, haben sowohl die Matrix als auch die erweiterte Matrix des Gleichungssystems den Rang zwei, die Dimension des Lösungsraums ist also $4 - 2 = 2$, so daß dieser in der Tat eine Ebene ist.

b) Die zweite Ebene besteht aus allen Punkten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda + \mu \\ 2 + \lambda - 2\mu \\ 3 - 2\mu \\ 4 - 2\lambda - \mu \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \, .$$

Einsetzen in das Gleichungssystem aus *a)* ergibt

$$(1 - \lambda + \mu) + (2 + \lambda - 2\mu) + (3 - 2\mu) + (4 - 2\lambda - \mu) = 10 - 2\lambda - 4\mu = 6$$

und

$$(1 - \lambda + \mu) - (2 + \lambda - 2\mu) + (3 - 2\mu) - (4 - 2\lambda - \mu) = -2 + 2\mu = 0 \, .$$

Also liegt der Punkt mit Parametern (λ, μ) genau dann in der ersten Ebenen, wenn $\mu = 1$ und damit $\lambda = 0$ ist; der Durchschnitt besteht also nur aus dem einen Punkt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

c) Da der Durchschnitt der beiden Ebenen aus genau einem Punkt besteht, also nicht leer und nulldimensional ist, hat der aufgespannte Raum nach der Dimensionsformel die Dimension

$2+2-0=4$. Der einzige vierdimensionale affine Unterraum von $\mathbb{R}^4$ ist $\mathbb{R}^4$ selbst, die Ebenen spannen also den gesamten $\mathbb{R}^4$ auf.

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*
Der Untervektorraum V von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sei erzeugt von der konstanten Funktion 1 sowie den Funktionen $\sinh x$ und $\cosh x$.

a) Zeigen Sie: Durch $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)\cdot g(x)\,dx$ wird ein Skalarprodukt auf V definiert.

b) Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von V bezüglich dieses Skalarprodukts!

Lösung:

a) Natürlich ist (f,g) bilinear und symmetrisch. Außerdem ist aus der Vorlesung bekannt, daß $(f,f) = \int_{-1}^{1} f(x)^2\,dx$ für eine stetige Funktion nur verschwindet, wenn f auf $[-1,1]$ identisch verschwindet. Eine Linearkombination von $1, \sinh x$ und $\cosh x$, die auf $[-1,1]$ identisch verschwindet, verschwindet aber überall identisch, also ist durch $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)\cdot g(x)\,dx$ ein Skalarprodukt definiert.

b) Wir konstruieren die Basis nach Gram-Schmidt:

$$(1,\sinh x) = \int_{-1}^{1} \sinh x\,dx = \cosh 1 - \cosh(-1) = 0\,,$$

da $\cosh x$ eine gerade Funktion ist. Damit sind diese beiden Funktionen bereits orthogonal. Den dritten Basis„vektor“ setzen wir an in der Form

$$\cosh x + \lambda\cdot 1 + \mu \sinh x\,.$$

Multiplikation mit dem ersten bereits bekannten Basisvektoren liefert

$$(1,\cosh x) + \lambda(1,1) + \mu(1,\sinh x) = (1,\cosh x) + \lambda(1,1)\,.$$

Hier ist

$$(1,\cosh x) = \int_{-1}^{1} \cosh x\,dx = \sinh 1 - \sinh(-1) = 2\sinh 1$$

und

$$(1,1) = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2\,;$$

falls das Produkt verschwinden soll, muß also

$$\lambda = \sinh 1$$

gesetzt werden. Skalarmultiplikation mit $\sinh x$ führt auf

$$(\sinh x, \cosh x) + \lambda(\sinh x, 1) + \mu(\sinh x, \sinh x)\,;$$

$$(\sinh x,\cosh x) = \int_{-1}^{1} \sinh x \cosh x\,dx \quad \text{und} \quad (1,\sinh x) = \int_{-1}^{1} \sinh x\,dx$$

verschwinden beide, da die Integranden ungerade Funktionen sind. Also muß auch $\mu = 0$ sein und der dritte Basisvektor ist $\cosh x - \sinh 1$. Eine Orthogonalbasis ist also beispielsweise

$$\{1, \sinh x, \cosh x - \sinh 1\}\,.$$

Aufgabe 6: *(4 Punkte)*

Das Kurvenstück γ sei definiert durch die Abbildung $\gamma\colon \begin{cases} [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \\ \quad t \mapsto (4\cos t, \sin t) \end{cases}$.

a) Beschreiben Sie das Bild von γ geometrisch!

b) Für welche Parameterwerte t hat der Tangentialvektor von γ minimale *bzw.* maximale Länge?

Lösung:

a) Für jeden Punkt (x,y) auf der Kurve ist

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1\,,$$

die Kurve ist also eine Ellipse mit Halbachsen 2 und 1.

b) $\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -4\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ hat die Länge $\sqrt{16\sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{15\sin^2 t + 1}$. Dieser Ausdruck nimmt seinen kleinstmöglichen Wert 0 an, wenn $\sin^2 t$ verschwindet, wenn also t ein ganzzahliges Vielfaches von π ist. Im Definitionsintervall kommen dafür die Parameterwerte $t = 0, \pi, 2\pi$ in Frage; Tangentialvektoren minimaler Länge gibt es also in den Punkten

$$\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (4,0) \quad \text{und} \quad \gamma(\pi) = (-4,0)\,.$$

Maximal wird die Länge, wenn $\sin^2 t = 1$ ist, also für $t = \pi/2$ und $t = 3\pi/2$. Dies entspricht den Punkten

$$\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1) \quad \text{und} \quad \gamma\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0,-1)\,.$$

Aufgabe 7: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Für jede reelle Zahl a ist

$$\Delta\left((x^2+y^2+z^2)^a\right) = 2a(2a+1)(x^2+y^2+z^2)^{a-1}\,!$$

b) Für welche natürlichen Zahlen n ist $\operatorname{div}\operatorname{grad} \dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^n} = 0$?

Lösung: Zunächst ist

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^a = 2x\cdot a(x^2+y^2+z^2)^{a-1}\,,$$

also

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2+y^2+z^2)^a &= 2x\cdot a\cdot 2x\cdot(a-1)(x^2+y^2+z^2)^{a-2} + 2\cdot a(x^2+y^2+z^2)^{a-1} \\ &= 4x^2a(a-1)(x^2+y^2+z^2)^{a-2} + 2a(x^2+y^2+z^2)^{a-1}\,.\end{aligned}$$

Genauso ist, da die drei Variablen in der obigen Funktion völlig gleichartig auftreten,

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2+y^2+z^2)^a = 4y^2a(a-1)(x^2+y^2+z^2)^{a-2} + 2a(x^2+y^2+z^2)^{a-1}$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(x^2+y^2+z^2)^a = 4z^2a(a-1)(x^2+y^2+z^2)^{a-2} + 2a(x^2+y^2+z^2)^{a-1}\,.$$

Insgesamt ist also $\Delta\left((x^2+y^2+z^2)^a\right)$ gleich

$$\begin{aligned}
&4(x^2+y^2+z^2)a(a-1)(x^2+y^2+z^2)^{a-2}+3\cdot 2a(x^2+y^2+z^2)^{a-1}\\
&=\big(4a(a-1)+6a\big)(x^2+y^2+z^2)^{a-1}=(4a^2+2a)(x^2+y^2+z^2)^{a-1}\\
&=2a(2a+1)(x^2+y^2+z^2)^{a-1}\,.
\end{aligned}$$

Falls man so etwas nicht in einer Klausur berechnet sondern in der Nähe einer Formelsammlung oder des Skriptums, verwendet man natürlich Kugelkoordinaten: In diesen ausgedrückt ist das Argument des LAPLACE*-Operators einfach* r^{2a}*, und da dies nicht von den beiden Winkelvariablen abhängt, ist gemäß der allgemeinen Formel*

$$\Delta f=f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=F_{rr}+\frac{2F_r}{r}+\frac{F_{\varphi\varphi}}{r^2\sin^2\vartheta}+\frac{F_{\vartheta\vartheta}}{r^2}+\frac{F_\vartheta}{r^2\tan\vartheta}\,,$$

die auch ich nicht auswendig kann,

$$\begin{aligned}
\Delta r^{2a}&=\frac{\partial^2 r^{2a}}{\partial r^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial r^{2a}}{\partial r}=2a(2a-1)r^{2a-2}-\frac{4a}{r}r^{2a-1}\\
&=2a(2a+1)r^{2a-2}=2a(2a+1)(x^2+y^2+z^2)^{a-1}\,.
\end{aligned}$$

b) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^n}=\Delta\left((x^2+y^2+z^2)^{-n/2}\right)$, und das ist nach *a)* gleich

$$(-n)(-n+1)(x^2+y^2+z^2)^{-n/2-1}\,,$$

verschwindet also genau für $n=0$ und $n=1$.

Aufgabe 8: *(4 Punkte)*
Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von $f(x,y)=e^{\sin x+\cos y-1}$ um $(0,0)$!

Lösung: Entweder durch Differenzieren oder übers Eindimensionale: Da

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

ist auch

$$e^{\sin x+\cos y-1}=1+(\sin x+\cos y-1)+\frac{(\sin x+\cos y-1)^2}{2!}+\frac{(\sin x+\cos y-1)^3}{3!}+\cdots\,.$$

Dabei ist

$$\sin x=x+\textit{höhere Terme}\quad\text{und}\quad\cos y=1-\frac{y^2}{2}+\textit{höhere Terme}\,,$$

also

$$\sin x+\cos y-1=x-\frac{y^2}{2}+\textit{höhere Terme}\,.$$

Einsetzen in die Exponentialreihe ergibt

$$e^{\sin x+\cos y-1}=1+\left(x-\frac{y^2}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(x-\frac{y^2}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{y^2}{2}\right)^3+\cdots\,.$$

Ab der dritten Potenz bekommen beim Ausmultiplizieren alle Terme größeren Grad als zwei; beim quadratischen Term können wir xy^2 und y^4 ignorieren. Als TAYLOR-Polynom zweiten Grades bleibt

$$1+x-\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2!}=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}\,.$$