WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

D7,27, ZIMMER 401

15. Juli 2000

Klausur und 11. Übungsblatt Höhere Mathematik I

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •
• • • Beantworten Sie alle *Fragen* auf demselben Blatt, • • •
• • • verwenden Sie aber bitte für jede *Aufgabe* ein eigenes Blatt, • • •
• • • da sich sonst die Korrektur für alle Teilnehmer verzögern wird. • • •

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Ist $\dim V > \dim W$, so ist jede lineare Abbildung $\varphi: V \to W$ surjektiv.

2) *Richtig oder falsch:* Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei $A^2 = A$. Dann ist A entweder die Einheitsmatrix oder die Nullmatrix.

3) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Einheitsmatrix E!

4) *Richtig oder falsch:* Es gibt genau eine reelle Zahl x, so daß $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 128 & x & 8 \\ 64 & 32 & 16 \end{vmatrix} = 256$ ist.

5) Finden Sie zwei affine Ebenen im $\mathbb{R}^4$, die sich in genau einem Punkt schneiden!

6) Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ hänge, in Polarkoordinaten geschrieben, nicht von der Winkelkoordinate φ ab. Was können Sie über die Niveaulinien von f sagen?

7) Die JACOBI-Matrix von $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei für jeden Punkt des $\mathbb{R}^n$ eine Diagonalmatrix. Was können Sie über f sagen?

8) Was ist $\operatorname{rot} \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z-x \end{pmatrix}$?

Aufgabe 1: (7 *Punkte)*
V sei der von $\{1, \sin x, \cos x, \sin x + \cos x, \sin^2 x, \cos^2 x, (\sin x + \cos x)^2\}$ erzeugte Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$

a) Bestimmen Sie eine Basis von V und berechnen Sie $\dim V$!

b) Zeigen Sie: Die Differentiation definiert eine lineare Abbildung $\varphi: \begin{cases} V \to V \\ f \mapsto f' \end{cases}$!

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ!

d) Bestimmen Sie eine Basis des Bilds von φ!

e) Welche Dimension hat der Kern von φ?

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 2: *(7 Punkte)*
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & z & - & 3w & = & 0 \\ -x & - & ay & + & (2a+1)z & - & 7aw & = & 6 \\ 3x & - & 3y & + & 2z & - & 6w & = & -1 \\ & & (2a+2)y & - & 3z & + & (a+6)w & = & 2a-5 \end{array}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die vier Vektoren $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\6\\7\\x\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\9\\0\\x\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\2\\x\\4\end{pmatrix}$ linear unabhängig?

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystem

$$x+y+z+w=6 \quad \text{und} \quad x-y+z-w=0$$

eine Ebene im vierdimensionalen affinen Raum $\mathbb{R}^4$ ist!

b) Berechnen Sie den Durchschnitt dieser Ebene mit dem affinen Unterraum

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-2\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\\-1\end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} !$$

c) Bestimmen Sie den affinen Unterraum des $\mathbb{R}^4$, den diese beiden Ebenen aufspannen!

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*
Der Untervektorraum V von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sei erzeugt von der konstanten Funktion 1 sowie den Funktionen $\sinh x$ und $\cosh x$.

a) Zeigen Sie: Durch $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x)\, dx$ wird ein Skalarprodukt auf V definiert.

b) Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von V bezüglich dieses Skalarprodukts!

Aufgabe 6: *(4 Punkte)*
Das Kurvenstück γ sei definiert durch die Abbildung $\gamma\colon \begin{cases} [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (4\cos t, \sin t) \end{cases}$.

a) Beschreiben Sie das Bild von γ geometrisch!

b) Für welche Parameterwerte t hat der Tangentialvektor von γ minimale *bzw.* maximale Länge?

Aufgabe 7: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Für jede reelle Zahl a ist

$$\Delta\left((x^2+y^2+z^2)^a\right) = 2a(2a+1)(x^2+y^2+z^2)^{a-1} !$$

b) Für welche natürlichen Zahlen n ist $\operatorname{div}\operatorname{grad} \dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^n} = 0$?

Aufgabe 8: *(4 Punkte)*
Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von $f(x, y) = e^{\sin x + \cos y - 1}$ um $(0, 0)$!