Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

D7,27, Zimmer 401

7. Juli 2000

10. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Für die Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ verschwinde die Jacobi-Matrix überall. Dann gibt es einen Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, so daß $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

2) Richtig oder falsch: Falls alle zweiten partiellen Ableitungen von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existieren und stetig sind, ist die Jacobi-Matrix von f symmetrisch.

3) Richtig oder falsch: Wenn die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ überall und zu jeder beliebigen Ordnung stetige partielle Ableitungen hat, ist sie um jeden Punkt durch eine Taylor-Reihe darstellbar.

4) Richtig oder falsch: Sei $D \subset \mathbb{R}^2$. Falls für $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ überall $\operatorname{grad} f \neq \vec{0}$ ist, kann $f(x, y) = 0$ überall eindeutig nach y aufgelöst werden.

5) Richtig oder falsch: Die Gleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ ist genau dann in einer Umgebung von $(a_0, \ldots a_n, x) \in \mathbb{R}^{n+2}$ eindeutig nach x auflösbar, wenn x eine einfache Nullstelle des Polynoms $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$ ist.

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*

a) Berechnen Sie für zwei Vektorfelder $\vec{V}, \vec{W} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ die Divergenz von $\vec{V} \times \vec{W}$ auf möglichst kompakte Weise!

b) Das Spatprodukt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ dreier Vektoren ist bis auf das Vorzeichen unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren; insbesondere ist $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$. Wenden Sie diese Formel an auf die „Vektoren“ $\vec{a} = \nabla, \vec{b} = \vec{V}$ und $\vec{c} = \vec{W}$, und vergleichen Sie mit *a)*!

Aufgabe 2: (*5 Punkte)*
Zeigen Sie: Für eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$ und ein Vektorfeld $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R}^3)$ auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^3$ gilt:

a) $\operatorname{div}(f\vec{V}) = (\operatorname{grad} f) \cdot \vec{V} + f \operatorname{div} \vec{V}$

b) $\operatorname{rot}(f\vec{V}) = (\operatorname{grad} f) \times \vec{V} + f \operatorname{rot} \vec{V}$

c) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{V}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{V}) - \begin{pmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3: (*5 Punkte)*
Entscheiden Sie für die folgenden Funktionen, wo diese eindeutig in der Form $y = g(x)$ nach y aufgelöst werden können, und bestimmen Sie dort die Ableitung $y' = g'(x)$!

a) $F(x, y) = x \sin y + \cos y + \cos 2y = 0$

b) $F(x, y) = |x|^{\cos y} + e^{\sin x} = 0$

Abgabe bis zum Freitag, dem 14. Juli 2000, um 12.00 Uhr