Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

D7,27, Zimmer 401

5. Mai 2000

1. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die leere Menge ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

2) Richtig oder falsch: Die Hintereinanderausführung zweier linearer Abbildungen ist wieder linear.

3) Richtig oder falsch: Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ \binom{x}{y} \mapsto \binom{x+y}{xy}$ ist linear.

4) Richtig oder falsch: Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ ;\ \binom{x}{y} \mapsto x + y + 1$ ist linear.

5) Richtig oder falsch: Falls für eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ die Hintereinanderausführung $\varphi \circ \varphi = \varphi$ ist, ist φ entweder die Identität oder die Nullabbildung.

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Die reellen Polynome vom Grad höchstens vier bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

b) Für welche $a_0 \in \mathbb{R}$ bilden die Polynome mit konstantem Koeffizienten a_0 einen Untervektorraum?

c) Ist auch die Menge aller reeller Polynome vom Grad genau vier ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

d) Ist auch die Menge *aller* reeller Polynome ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x + 2y + z \\ 2x + 3y + 4z \end{pmatrix} \end{array} \right.$ ist linear.

b) Bestimmen Sie den Kern von φ!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: $V = \left\{ a \sin t + b \cos t \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

b) Die Abbildung $\varphi\colon \left\{ \begin{array}{l} V \to V \\ f \mapsto \dfrac{df}{dt} \end{array} \right.$ ist linear.

c) Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist auch die Abbildung $\varphi\colon \left\{ \begin{array}{l} V \to V \\ f \mapsto \displaystyle\int_c^t f(\tau)\, d\tau \end{array} \right.$ linear?

Abgabe bis zum Freitag, dem 12. Mai 2000, um 12.00 Uhr