Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

D7,27, Zimmer 401

30. Juni 2000

9. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Die Niveaulinien der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zum Wert a seien die Geraden $y = x - a$. Was ist f?

2) Der Graph der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit Koordinaten x, y in $\mathbb{R}^2$ und z in $\mathbb{R}$ sei die Fläche, die aus der Parabel $z = x^2$ durch Rotation um die z-Achse entsteht. Was ist f?

3) Gibt es Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$, deren Graph gleich der Oberfläche einer Kugel ist?

4) Was ist das Bild des Graphen der Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ unter der Projektion $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $(x, y, z) \mapsto (x, y)$?

5) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Funktion $y \mapsto f(x, y)$ stetig ist.

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
Betrachten Sie die Funktion $f(x, y, z) = x \cdot e^{xy/z}$.

a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^3$ für f.

b) Berechnen Sie dort die Ableitung von f!

c) Berechnen Sie die Hesse-Matrix von f!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades für die Funktion

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto e^{x^2 + y^3}$

b) $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto \ln(x + \cos^2 y)$

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Für zwei differenzierbare Funktionen $f, g: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$\operatorname{grad}(f \cdot g) = g \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} g\,!$$

b) Zeigen Sie: Die partielle Ableitung f_{xy} von $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ verschwindet genau dann überall, wenn es Funktionen $g, h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gibt, so daß $f(x, y) = g(x) + h(y)$ ist.

Abgabe bis zum Freitag, dem 7. Juli 2000, um 12.00 Uhr