WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

D7,27, ZIMMER 401

16. Juni 2000

7. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* V sei ein EUKLIDischer Vektorraum und für $\vec{u}, \vec{v} \in V$ sei $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w}$ für alle $\vec{w} \in V$. Dann ist $\vec{u} = \vec{v}$.

2) *Richtig oder falsch:* Die LORENTZ-Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - c^2t_1t_2$ macht $\mathbb{R}^4$ zum EUKLIDischen Vektorraum.

3) *Richtig oder falsch:* Die Abbildung $(z, w) \mapsto |zw|$ macht $\mathbb{C}$ zu einem EUKLIDischen Vektorraum.

4) *Richtig oder falsch:* Die Abbildung $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \|\vec{v} \times \vec{w}\|$ macht $\mathbb{R}^3$ zu einem EUKLIDischen Vektorraum.

5) Drücken Sie $\vec{v} \cdot \vec{w}$ aus durch $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$ und $\|\vec{v} + \vec{w}\|$!

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 3y + 5z &= 1 \\ 2x + 4y + 6z &= 1 \\ 3x + 5y + 8z &= 1 \end{aligned}$$

nach der CRAMERschen Regel!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
A sei eine $n \times n$-Matrix mit lauter ganzzahligen Einträgen. Zeigen Sie:

a) Falls $\det A = \pm 1$ ist, hat jedes lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit ganzzahliger rechter Seite $\vec{b} \in \mathbb{Z}^n$ eine eindeutig bestimmte ganzzahlige Lösung $\vec{x} \in \mathbb{Z}^n$.

b) Falls $\det A = \pm 1$ ist, hat auch A^{-1} lauter ganzzahlige Einträge.

c) Falls A^{-1} lauter ganzzahlige Einträge hat, ist $\det A = \pm 1$.

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
V sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens zwei.

a) Zeigen Sie: Durch $f \cdot g \underset{\text{def}}{=} \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ wird ein Skalarprodukt auf V definiert.

b) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von V.

Abgabe bis zum Freitag, dem 23. Juni 2000, um 12.00 Uhr