Wolfgang K. Seiler D7,27, Zimmer 401
Tel. 2515

2. Juni 2000

5. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Hat die Matrix $A \in k^{n\times n}$ den Rang n, so ist für jedes $B \in k^{n\times m}$ die Matrixgleichung $AX = B$ eindeutig lösbar.

Richtig, denn dann ist A invertierbar und aus $AX = B$ folgt $X = A^{-1}AX = A^{-1}B$. Umgekehrt ist $X = A^{-1}B$ eine Lösung, denn $AA^{-1}B = B$.

2) *Richtig oder falsch:* Jede Permutationsmatrix ist invertierbar.

Richtig, denn da in jeder Spalte genau eine Eins steht, sind die Spaltenvektoren Einheitsvektoren, und da in jeder Zeile genau eine Eins steht, kommt keiner von denen zweimal vor. Also hat die Matrix maximalen Rang und ist invertierbar.

3) *Richtig oder falsch:* Der Rang einer $n \times n$-Matrix A ist gleich der Anzahl der von Null verschiedenen Diagonalelemente der Matrix R aus ihrer LR-Zerlegung.

Falsch: Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist $L = E$ und $A = R$; A hat Rang zwei, aber es gibt nur einen von Null verschiedenen Diagonaleintrag.

4) Für welche Matrix P ist $P \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$?

P muß die erste mit der dritten Zeile vertauschen; somit ist

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

5) Was ist die inverse Permutation zu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$?

$2 \mapsto 1$, $4 \mapsto 2$, $1 \mapsto 3$, $3 \mapsto 4$ und $5 \mapsto 5$. Sortieren nach dem Urbild ergibt die Darstellung

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ die Menge aller reeller Matrizen X, für die gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} \; !$$

Wir versuchen, im Schema

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & \alpha & \alpha \end{array}$$

in den linken drei Spalten die Einheitsmatrix oder etwas ähnliches zu bekommen. Subtraktion der ersten Zeile von der dritten und ihres doppelten von der zweiten führt auf

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \alpha-1 & \alpha-2\,; \end{array}$$

Subtraktion der zweiten Zeile von der dritten auf

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & \alpha-1\,. \end{array}$$

Damit ist klar, daß die Matrixgleichung für $\alpha \neq 1$ unlösbar ist.
Für $\alpha = 1$ haben wir, nach Multiplikation der zweiten Zeile mit -1,

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Subtraktion der vierfachen zweiten Zeile von der ersten macht daraus

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\,.$$

Damit ist die Matrixgleichung reduziert auf

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} x_1 - y_1 & x_2 - y_2 \\ y_1 + z_1 & y_2 + z_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Wie man sieht, kann man z_1 und z_2 beliebig wählen, etwa $z_1 = \lambda$ und $z_2 = \mu$. Dann ist nach der zweiten Zeile der Matrixgleichung $y_1 = -\lambda$ und $y_2 = 1 - \mu$. Einsetzen in die erste Zeile zeigt schließlich, daß $x_1 = 1 - \lambda$ und $x_2 = -1 - \mu$ ist.
Die gesuchte Menge ist also für $\alpha \neq 1$ die leere Menge $\emptyset$ und für $\alpha = 1$ die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1-\mu \\ -\lambda & 1-\mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}\,.$$

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 2 & 3 & 4 \\ 2-2a & a-6 & -3 & -4 \\ a-1 & 6-2a & a-6 & 0 \\ 0 & (a+1)(a-2) & 9+4a-a^2 & a-8 \end{pmatrix}$$

Hierzu müssen wir im Schema

$$\begin{array}{cccccccc} a-1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2-2a & a-6 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a-1 & 6-2a & a-6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & (a+1)(a-2) & 9+4a-a^2 & a-8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

versuchen, links eine obere Dreiecksmatrix zu erzeugen.
Addition der zweifachen ersten Zeile zur zweiten und Subtraktion der ersten Zeile von der dritten macht daraus

$$\begin{array}{cccccccc} a-1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-2 & 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4-2a & a-3 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & (a+1)(a-2) & 9+4a-a^2 & a-8 & 0 & 0 & 0 & 1\,. \end{array}$$

Als nächstes addieren wir das zweifache der zweiten Zeile zur driten und subtrahieren ihr $(a+1)$-faches von der vierten; dies ergibt das Schema

$$\begin{array}{cccccccc} a-1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-2 & 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6+a-a^2 & -3a-12 & -2a-2 & -a-1 & 0 & 1\,. \end{array}$$

Da $6+3-3^2=0$ verschwindet, ist 3 eine Nullstelle von $6+a-a^2$; das Produkt mit der anderen ist nach dem Wurzelsatz von VIÈTE gleich -6, d.h.

$$6+a-a^2=(a-3)(-a-2)\,.$$

Also addieren wir die $(a+2)$-fache dritte Zeile zur vierten und kommen so auf die Endgestalt

$$\begin{array}{cccccccc} a-1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-2 & 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 & a+4 & a+3 & a+2 & 1 \end{array}$$

Somit ist

$$R = \begin{pmatrix} a-1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & a-2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & a-3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ a+4 & a+3 & a+2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Geben Sie, in Abhängigkeit von a und einer beliebigen rechten Seite, die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$ durch möglichst einfache Formeln an!

Multiplikation mit L macht das Gleichungssystem zu

$$R \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} ,$$

ausgeschrieben

$$\begin{aligned} (a-1)x + 2y + 3z + 4w &= b \\ (a-2)y + 3z + 4w &= 2b + c \\ (a-3)z + 4w &= 3b + 2c + d \\ (a-4)w &= (a+4)b + (a+3)c + (a+2)d + e\,. \end{aligned}$$

Also ist

$$w = \frac{(a+4)b + (a+3)c + (a+2)d + e}{a-4}\,.$$

Setzt man dies ein in die dritte Gleichung, folgt

$$z = \frac{3b + 2c + d - 4w}{a-3}\,.$$

Entsprechend ist

$$y = \frac{2b + c - 3z - 4w}{a-2}$$

und

$$x = \frac{b - 2y - 3t - 4w}{a-1}\,.$$

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)

a) Berechnen Sie das Produkt $\pi_1 \circ \pi_2$ der beiden Permutationen

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \text{ und } \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} !$$

Der Abbildungsgang ist

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 9 & 5 & 1 & 8 & 4 & 2 & 6 & 10 & 3 & 7 \end{array} ,$$

also ist

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 5 & 1 & 8 & 4 & 2 & 6 & 10 & 3 & 7 \end{pmatrix} .$$

b) Schreiben Sie die Permutation π_1 als Produkt von Transpositionen!

$$\sigma_2 \underset{\text{def}}{=} \pi_1 \circ (5\;10) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 9 & 1 & 3 & 5 & 7 & 10 \end{pmatrix} \text{ läßt 10 fest.}$$

$$\sigma_2 \underset{\text{def}}{=} \sigma_1 \circ (5\;9) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 7 & 1 & 3 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \text{ läßt 9 und 10 fest.}$$

$$\sigma_3 \underset{\text{def}}{=} \sigma_2 \circ (4\;8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 7 & 1 & 3 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \text{ läßt 8, 9 und 10 fest.}$$

$$\sigma_4 \underset{\text{def}}{=} \sigma_3 \circ (5\;7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 3 & 1 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \text{ läßt 7, 8, 9 und 10 fest.}$$

$$\sigma_5 \underset{\text{def}}{=} \sigma_4 \circ (3\;6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \text{ läßt 6, 7, 8, 9 und 10 fest.}$$

$$\sigma_6 \underset{\text{def}}{=} \sigma_5 \circ (4\;5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \text{ läßt 5, 6, 7, 8, 9 und 10 fest.}$$

$$\sigma_7 \underset{\text{def}}{=} \sigma_6 \circ (2\;4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \text{ läßt 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10 fest.}$$

$$\sigma_8 \underset{\text{def}}{=} \sigma_7 \circ (2\;3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \text{ läßt 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10 fest}$$

und vertauscht die Eins mit der Zwei, ist also gleich $(1\;2)$.

Somit ist $\pi_1 = (1\;2) \circ (2\;3) \circ (2\;4) \circ (4\;5) \circ (3\;6) \circ (5\;7) \circ (4\;8) \circ (5\;9) \circ (5\;10)$.

Abgabe bis zum Freitag, dem 9. Juni 2000, um 12.00 Uhr