Wolfgang K. Seiler

Höhere Mathematik I

Vorlesung an der Universität Mannheim
im Sommersemester 2000

Dieses Skriptum entsteht parallel zur Vorlesung und soll mit möglichst geringer Verzögerung erscheinen. Es ist daher in seiner Qualität auf keinen Fall mit einem Lehrbuch zu vergleichen; insbesondere sind Fehler bei dieser Entstehensweise nicht nur möglich, sondern **sicher**. Dabei handelt es sich wohl leider nicht immer nur um harmlose Tippfehler, sondern auch um Fehler bei den mathematischen Aussagen.

Das Skriptum sollte daher mit Sorgfalt und einem gewissen Mißtrauen gegen seinen Inhalt gelesen werden; falls Sie Fehler finden, teilen Sie mir dies bitte persönlich oder per e-mail (seiler@math.uni-mannheim.de) mit, oder informieren Sie Ihren Übungsgruppenleiter. Auch wenn Sie Teile des Skriptums unverständlich finden, bin ich für entsprechende Hinweise dankbar.

Falls genügend viele Hinweise eingehen, werde ich von Zeit zu Zeit Listen mit Berichtigungen und Verbesserungen zusammenstellen.

Literaturhinweise 1

KAPITEL I: VEKTORRÄUME UND LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME 4

§1: Vektoren und Vektorräume 4

a) Vektoren in der Ebene und im Raum 4

b) Definition des Vektorraums 8

c) Erste Beispiele 10

d) Lineare Abbildungen 13

e) Untervektorräume 16

f) Lineare Abhängigkeit 20

g) Die Dimension eines Vektorraums 24

h) Basen 25

i) Lineare Abbildungen und Untervektorräume 33

§2: Matrizen und lineare Gleichungssysteme 36

a) Abbildungsmatrizen 36

b) Rechenregeln für Matrizen 38

c) Matrixdarstellung der komplexen Zahlen 47

d) Das GAUSSsche Eliminationsverfahren 53

e) Erste Beispiele 55

f) Lösbarkeitskriterien für lineare Gleichungssysteme 69

g) Ausblick: Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme 75

§3: Die inverse Matrix 81

a) Matrixgleichungen und lineare Gleichungssysteme 81

b) Beispiel einer Matrixinversion 82

c) Anwendung auf die Invertierbarkeit einer Matrix 84

d) Die LR-Zerlegung einer Matrix 85

§4: Determinanten 94

a) Das Skalarprodukt und Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ 94

b) Das Spatprodukt 99

c) Forderungen an eine allgemeine Determinante 104

d) Permutationen 106

e) Existenz von Determinanten 114

f) Die Determinante einer Matrix 119

g) Der Entwicklungssatz von LAPLACE 126

h) Die CRAMERsche Regel 135

KAPITEL II: DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG MEHRERER VERÄNDERLICHER 137

§1: Euklidische und normierte Vektorräume 138

a) Euklidische Vektorräume 138

b) Orthonormalbasen 145

c) Affine und Euklidische Geometrie 149

d) Normen, Stetigkeit und Konvergenz 161

§2: Skalarwertige Funktionen mehrer Veränderlicher 166

§3: Grundlegende Sätze 192

a) Linearität und Produktregel 192

b) Kurven und Tangentenvektoren 192

c) Eine Kettenregel 196

d) Der Satz über implizite Funktionen 196

§4: Vektorwertige Funktionen mehrer Veränderlicher 201

a) Der Begriff des Vektorfelds 203

b) Die JACOBI-Matrix 204

c) Die Divergenz eines Vektorfelds 206

d) Die Rotation eines dreidimensionalen Vektorfelds 209

e) Erste Beispiele 213

1) Das elektrische Feld einer Punktladung 213

2) Das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters 215

f) Allgemeine Rechenregeln 219

g) Polarkoordinaten, Kugelkoordinaten und Zylinderkoordinaten 222

1) Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ 222

2) Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ 224

3) Kugelkoordinaten 225

§5: Kurvenintegrale im $\mathbb{R}^n$ 227

a) Die Bogenlänge einer Kurve 228

b) Integration eines Vektorfelds längs einer Kurve 233

c) Zirkulationsfreie und konservative Vektorfelder 238

§6: Mehrdimensionale Integrationstheorie 244

a) Flächeninhalte und Volumina 244

b) Integration über Normalbereiche 252

c) Die Transformationsformel 258

d) Der Satz von GREEN und der ebene Satz von GAUSS 269

e) Oberflächenintegrale 276

f) Die Sätze von STOKES und GAUSS 287