und jeder der vier Faktoren rechts ist ein endlich vielen Schritten berechenbar.

Wie wir weiterhin wissen, hat jede Lösung der Differentialgleichung $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ die Form

$$\vec{y}(t) = e^{At}\vec{y}_0 \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{y}_0 = \vec{y}(0) \in \mathbb{C}^n \ ;$$

wir kennen also alle Lösungen des Systems. Falls Anfangsbedingungen vorgegeben sind, die sich auf einen beliebigen Zeitpunkt $t = t_0$ beziehen, können wir die Lösung entsprechend schreiben als

$$\vec{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\vec{y}(t_0)\ .$$

Solange wir in der Lage sind, die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A zu berechnen, können wir also jedes Anfangswertproblem in Gestalt eines Systems linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten lösen.

c) Langzeitverhalten der Lösung

Nicht immer ist es notwendig oder auch nur möglich, ein Differentialgleichungssystem zur exakten numerischen Vorhersage der weiteren Entwicklung eines Systems zu verwenden; gelegentlich reicht auch ein qualitativer Überblick. Dabei geht es vor allem um das Langzeitverhalten des Systems: Nähert es sich einem Gleichgewicht, „explodiert“ es, oder wird es auf lange Sicht periodisch, wie wir es etwa vom Fall der erzwungenen Schwingung her kennen.

Für solche Aussagen reicht es im Falle eines linearen homogenen Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$, die Eigenwerte der Matrix A zu kennen: Bezüglich einer Basis aus Hauptvektoren läßt sich A in der Form $D + N$ schreiben mit einer Diagonalmatrix D, für die e^{Dt} Diagonalmatrix ist mit den Funktionen $e^{\lambda t}$ als Einträgen, wobei λ die Eigenwerte von A durchläuft. Die Matrix e^{Nt} hat Polynome in t als Einträge; das Produkt $e^{Dt}e^{Nt}$ hat also wegen der speziellen Formen von D und N Produkte von Polynomen in t mit e^{λ^t} als Einträge, wobei der Grad des Polynoms höchstens die um eins verminderte größte Stufe eines Hauptvektors zu λ ist. Bei der Rücktransformation auf die Ausgangsbasis entstehen Linearkombinationen solcher Funktionen, die bei der Multiplikation mit dem Vektor der Anfangswerte selbst wieder linear kombiniert werden. Insgesamt ist also jede Lösungsfunktion eine Linearkombination von Termen der Form $t^j e^{\lambda t}$.

Falls nur ein Eigenwert λ von A positiven Realteil hat, muß das System fast unweigerlich explodieren, da der Betrag von $e^{\lambda t}$ für hinreichend großes t jede vorgegebene Grenze überschreitet. Zwar sind eventuell Anfangsbedingungen möglich, bei denen $e^{\lambda t}$ nicht in der Lösung des Anfangswertproblems auftritt, aber da die Anfangswerte in der Praxis nie durch Naturgesetze gegeben sind, sondern durch fehlerbehaftete Meßwerte, kann schon eine kleine Störung den Term $e^{\lambda t}$ wieder ins Spiel bringen, und auch für sehr kleines c dominiert $ce^{\lambda t}$ langfristig jede beschränkte Funktion.

Haben dagegen *alle* Eigenwerte von A negativen Realteil, geht jeder Term $t^j e^{\lambda t}$ gegen Null für $t \to \infty$ und damit auch jede Lösungsfunktion; der Lösungsvektor nähert sich also immer mehr der Gleichgewichtslösung $\vec{y}(t) \equiv 0$.

Bleibt noch der Fall von Eigenwerten mit Realteil null. Hier werden die bei mehrfachen Eigenwerten möglichen Polynome wichtig, denn während der Betrag von $e^{\lambda t}$ konstant ist, geht der Betrag der mit einem nichtkonstanten Polynom multiplizierten Funktion gegen $\pm\infty$.

Schließlich sollten wir auch die Imaginärteile der Eigenwerte nicht ganz vergessen: Falls A, wie in den meisten Anwendungen, eine reelle Matrix ist, ist mit jedem nichtreellen Eigenwert λ auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert derselben Vielfachheit wie λ. Mit $\lambda = a + ib$ ist

$$e^{\lambda t} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt) \quad \text{und} \quad e^{\overline{\lambda} t} = e^{at}(\cos bt - i \sin bt)\,,$$

jede Linearkombination von $e^{\lambda t}$ und $e^{\overline{\lambda} t}$ läßt sich also auch als Linearkombination der beiden reellen Funktionen

$$e^{at}\cos bt \quad \text{und} \quad e^{at}\sin bt$$

schreiben. Die Imaginärteile bringen also Schwingungsanteile in die Lösungsfunktionen.

Um einen ersten Eindruck vom Lösungsverhalten linearer homogener Differentialgleichungssysteme mit reellen Koeffizienten zu bekommen, wollen wir uns überlegen, was in niedrigen Dimensionen möglich ist.

Im Eindimensionalen besteht das „System“ einfach aus der Differentialgleichung $\dot{y}(t) = ay(t)$ mit Lösung $y(t) = y(0)e^{at}$; für $a > 0$ geht dies je nach Vorzeichen von $y(0)$ gegen plus oder minus unendlich für $t \to \infty$, für $a < 0$ gegen null, und für $a = 0$ ist $y(t) = y(0)$ konstant.

Etwas interessanter ist es im Zweidimensionalen: Hier hat die Matrix A einen oder zwei Eigenwerte.

Falls es nur einen gibt und dieser die geometrische Vielfachheit zwei hat, ändert sich nichts wesentliches gegenüber der eindimensionalen Situation: Die Lösungsfunktion ist $\binom{x(0)}{y(0)} \cdot e^{\lambda t}$.

Falls der Eigenwert nur die algebraische Vielfachheit eins hat, sind die Lösungsfunktionen Linearkombinationen von $e^{\lambda t}$ und $te^{\lambda t}$, also Produkte lineare Funktionen mit $e^{\lambda t}$. Jetzt können die Lösungen auch im Fall $\lambda = 0$ unbeschränkt werden.

Wenn es zwei verschiedene Eigenwerte gibt, können diese entweder beide reell oder aber konjugiert komplex sein.

Im reellen Fall können beide positiv sein; dann geht jede nichttriviale Lösung ins Unendliche, oder aber beide können negativ sein; dann nähert sich jede Lösung immer mehr dem Nullpunkt. Alternativ könnte einer positiv und einer negativ sein; in diesem Fall nähern sich alle Lösungskurven einer Geraden, gehen aber mit dieser ins Unendliche. Schließlich könnte noch ein Eigenwert null sein; dann liegen alle Lösungskurven auf Geraden und gehen dort je nach Vorzeichen des anderen Eigenwerts gegen einen festen Punkt oder aber ins Unendliche.

Bleibt noch der Fall zweier konjugiert komplexer Eigenwerte $a \pm ib$; in diesem Fall sind die Lösungsfunktionen Linearkombinationen von $e^{at} \cos t$ und $e^{at} \sin t$.

Für $a = 0$ haben wir einfach reine Schwingungen; falls die beiden Eigenvektoren senkrecht aufeinander stehen, bekommen wir als Lösungskurven Kreislinien, ansonsten affine Verzerrungen davon, also Ellipsen.

Für $a \neq 0$ ergeben sich entsprechend Spiralen, die je nach Vorzeichen von a entweder ins Unendliche gehen oder aber sich auf den Nullpunkt zusammenziehen.

Betrachten wir als Beispiel das System

$$\dot{x}(t) = -10{,}2x(t) - 25y(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = 5x(t) + 9{,}8y(t)\,.$$

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -10\frac{1}{5} & -25 \\ 5 & 9\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

hat das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + \frac{2}{5}\lambda + 25\frac{1}{5}$$

mit Nullstellen $-\frac{1}{5} \pm 5i$, die Lösungskurven sind also sich nach innen zusammenziehende Spiralen. Mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $y(0) = 1$ erhalten wir die Lösung

$$x(t) = -5e^{-t/5} \sin 5t \quad \text{und} \quad y(t) = e^{-t/5}(\cos 5t + 2 \sin 5t)\,,$$

die in Abbildung 19 zu sehen ist.

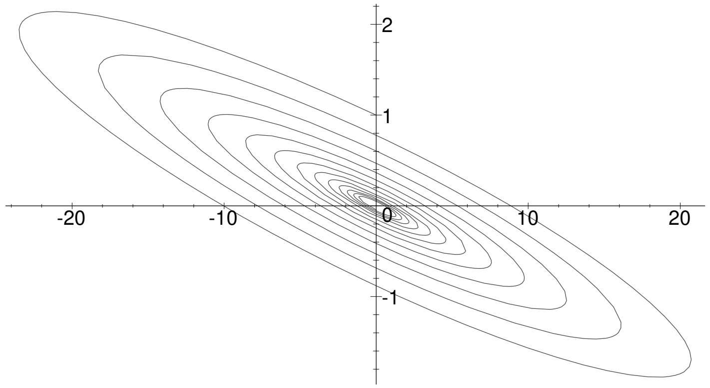

Abb. 19: Spiralförmige Annäherung an den Nullpunkt

Im Dreidimensionalen gibt es entsprechend mehr Möglichkeiten; ich möchte auf die weniger interessanten Fälle mit lauter reellen Eigenwerten verzichten und nur den betrachten, daß zwei konjugiert komplexe auftreten, etwa $a \pm ib$. Der dritte Eigenwert λ muß dann natürlich reel sein.

Falls er null ist, sind wir im wesentlichen in der zweidimensionalen Situation: Da dann in Richtung des dritten Eigenvektors alles konstant ist, spielt sich alles in einer Ebenen ab, die parallel zu der von den ersten beiden Eigenvektoren aufgespannten liegt.

Falls er negativ ist, nähert sich in Richtung des dritten Eigenvektors alles der Ebenen, in der dessen Koordinate null ist, die also von den beiden anderen Eigenvektoren aufgespannt wird, und dort ist die Dynamik je nach Vorzeichen von a spiralförmig nach innen oder außen oder einfach ellipsenförmig. Abbildung 20 zeigt den Fall $a = -1/10, b = 2$ und $\lambda = -1/6$; die Eigenvektoren zeigen in Richtung der Koordinatenachsen.

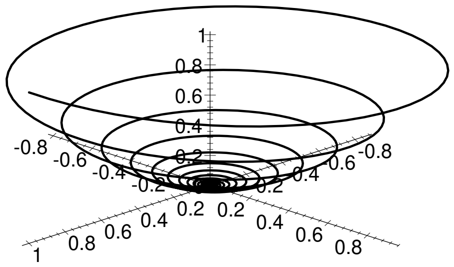

Abb. 20: Spiralförmige Annäherung an den Nullpunkt im Dreidimensionalen

In Abbildung 21 ist $a = +1/10$ und ansonsten alles unverändert; wie man sieht, nähert sich nun die Lösungskurve zwar der (x, y)-Ebenen, geht in dieser aber spiralförmig ins Unendliche.

Falls der dritte Eigenwert positiv ist, geht in Richtung seines Eigenvektors alles ins Unendliche; je nach Vorzeichen von a entfernen sich die Lösungskurven dabei spiralförmig von der durch diesen Eigenvektor aufgespannten Geraden oder aber gehen auf sie zu. Abbildung 22 zeigt den letzteren Fall mit $\lambda = +1/6$ und a, b wie in Abbildung 19.

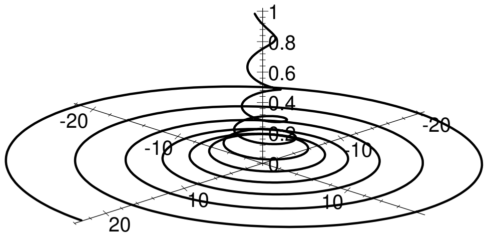

Abb. 21: Spirale, die sich der (x, y)-Ebenen nähert

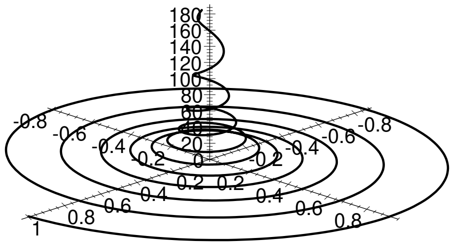

Abb. 22: Spirale, die sich der z-Achse nähert

Man beachte, daß die Abbildungen 21 und 22 zwar auf den ersten Blick sehr ähnlich aussehen, daß aber die Dynamik in Abbildung 21 in z-Richtung nach unten geht, in Abbildung 22 aber nach oben. Der Rotationssinn der Spiralen ist in beiden Fällen der Gegenuhrzeigersinn.

d) Lineare homogene Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine der wichtigsten Anwendungen der Theorie aus den letzten Abschnitten in der Elektrotechnik sind lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Dieser Abschnitt soll zeigen, daß man in diesem Spezialfall weder Determinanten noch Eigen- und Hauptvektoren berechnen muß, um die Lösungsfunktionen zu finden.

Um zu sehen, was der allgemeine Ansatz in diesem Spezialfall ergibt, schreiben wir die Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad a_i \in \mathbb{C}\,.$$

als ein System

$$\begin{aligned}
\dot{y}_0(t) &= y_1(t)\\
\dot{y}_1(t) &= y_2(t)\\
\vdots\ &\ \vdots\\
\dot{y}_{n-2}(t) &= y_{n-1}(t)\\
\dot{y}_{n-1}(t) &= -a_{n-1}y_{n-1}(t) - \cdots - a_1\dot{y}_1(t) - a_0 y_0(t)
\end{aligned}$$

oder kurz $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_0(t)\\ \vdots \\ y_{n-1}(t) \end{pmatrix}\,.$$

Die Lösungen $\vec{y}(t)$ dieses Systems definieren Lösungen $y(t) = y_0(t)$ der obigen Gleichung, und umgekehrt ist auch für jede solche Lösung $y(t)$

der Vektor

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y(t)\\ \dot{y}(t)\\ \ddot{y}(t)\\ \vdots\\ y^{(n-2)}(t)\\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

eine Lösung des Systems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$.

Aus dem vorigen Abschnitt wissen wir, daß die Lösungen dieses Systems einen n-dimensionalen Vektorraum V von vektorwertigen Funktionen $t \mapsto \vec{y}(t)$ bilden. Jede einzelne Komponente jeder Lösung aus diesem Vektorraum ist darstellbar als Linearkombination von Funktionen $t^j e^{\lambda_i t}$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte von A sind und $j \geq 0$ kleiner ist als die größte Stufe eines Hauptvektors zu λ_i, insbesondere also kleiner als die algebraische Vielfachheit von λ_i. Insbesondere stehen also bei einfachen Eigenwerten oder allgemeiner bei Eigenwerten, deren geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen ist, überhaupt keine echten t-Potenzen vor den Exponentialfunktionens.

Außerdem wissen wir, daß jedes Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist: Bei Anfangsbedingungen

$$y_0(t_0) = c_0, \quad \dots, \quad y_{n-1}(t_0) = c_{n-1}$$

ist

$$\vec{y}(t) = e^{A(t-t_0)}$$

die Lösung. Vornehm ausgedrückt können wir auch sagen, daß für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ die Abbildung

$$V \to \mathbb{C}^n; \quad \vec{y}(t) \mapsto \vec{y}(t_0)$$

ein Isomorphismus ist.

Für jeden Lösungsvektor $\vec{y}(t)$ des Differentialgleichungssystems ist die nullte Komponenten $y_0(t)$ Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = 0\,,$$

und diese Komponente bestimmt auch die anderen Komponenten $y_i(t)$, die ja gerade die Ableitungen von $y_0(t)$ sind. Daher bilden auch die Lösungsfunktionen dieser Gleichung einen n-dimensionalen Vektorraum, d.h. auch die Abbildung $\vec{y}(t) \mapsto y_0(t)$ ist ein Isomorphismus, und wenn wir Anfangsbedingungen mit ins Spiel bringen folgt auch, daß es für jede Vorgabe von Werten $y(t_0), \dot{y}(t_0), \ddot{y}(t_0), \ldots, y^{(n-1)}(t_0)$ genau eine Lösung gibt.

Wie wir uns gerade überlegt haben, ist $y_0(t)$ Linearkombination von Funktionen der Art $t^j e^{\lambda_i t}$, wobei λ_i die Eigenwerte von A durchläuft und j kleiner als die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ_i ist.

Die Summe der algebraischen Vielfachheiten der (komplexen) Eigenwerte einer komplexen $n \times n$-Matrix ist gleich dem Grad des charakteristischen Polynoms, also gleich n; damit gibt es genau n solche Funktionen. Andererseits wissen wir, daß der Lösungsraum die Dimension n hat; somit werden alle diese Funktionen wirklich gebraucht und sie bilden eine Basis des Lösungsraums.

Für eine wirklich befriedigende Kenntniss des Lösungsraums fehlt uns nun nur noch ein Verfahren, wie wir die Eigenwerte λ_i und deren algebraische Vielfachheiten α_i direkt aus den Koeffizienten der Gleichung berechnen können.

Zumindest die Eigenwerte λ_i lassen sich leicht aus der Gleichung ablesen: Für die Funktion $y(t) = e^{\lambda t}$ ist $y^{(i)}(t) = \lambda^i e^{\lambda t}$, sie ist also genau dann eine Lösung der Differentialgleichung, wenn

$$\begin{aligned} &\lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda t} + \cdots + a_1\lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} \\ &= (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda t} \end{aligned}$$

verschwindet; da $e^{\lambda t}$ nirgends verschwindet, ist dies genau dann der Fall, wenn

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \qquad (*)$$

ist.

Definition: Die Gleichung $(*)$ heißt *charakteristische Gleichung* der

Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = 0\,.$$

Die Eigenwerte λ_i von A sind also genau die Nullstellen der charakteristischen Gleichung der Differentialgleichung. Da diese denselben Grad hat wie das charakteristische Polynom von A liegt die Vermutung nahe, daß sie (eventuell bis auf eine Konstante) damit übereinstimmt, und das ist auch tatsächlich der Fall:

Lemma: Die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung ist das mit $(-1)^n$ multiplizierte charakteristische Polynom von A.

Beweis: Für $n = 1$ ist die Differentialgleichung $\dot{y}(t) = ay(t)$ identisch mit dem zugehörigen System; die charakteristische Gleichung ist $\lambda - a$, und die „Matrix“ $A = (a)$ hat das charakteristische Polynom $a - \lambda$. Für $n = 1$ stimmt die Behauptung also.

Für $n > 1$ entwickeln wir das charakteristische Polynom

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}$$

nach der ersten Spalte und erhalten

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) = -\lambda &\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & -\lambda & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix} \\ &+ (-1)^{n-1}(-a_0) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & -\lambda & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Die erste Determinate auf der rechten Seite ist von derselben Form wie das betrachtete charakteristische Polynom, hat aber nur die Größe $(n-1)\times(n-1)$. Wir können daher induktiv schließen, daß sie gleich

$$(-1)^{n-1}\left(a_n\lambda^{n-1}+a_{n-1}\lambda^{n-2}+\cdots+a_2\lambda+a_1\right)$$

ist. Die zweite Determinante läßt sich direkt ausrechnen: Wie man sich leicht überlegt (oder in **[HM1]**, Kapitel I, §4*f)* nachliest), ist die Determinante einer Dreiecksmatrix gleich dem Produkt ihrer Diagonalelemente; die zweite Determinante ist also gleich eins. Damit folgt

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda E) &= (-\lambda)(-1)^{n-1}\left(a_n\lambda^{n-1}+a_{n-1}\lambda^{n-2}+\cdots+a_2\lambda+a_1\right)\\ &\quad+(-1)^{n-1}(-a_0)\\ &= (-1)^n\left(a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0\right),\end{aligned}$$

wie behauptet.

■

Insbesondere haben also die charakteristische Gleichung einer Differentialgleichung und das charakteristische Polynom der zugehörigen Matrix nicht nur dieselben Nullstellen, sondern auch die Vielfachheiten dieser Nullstellen sind gleich; die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte lassen sich direkt aus der charakteristischen Gleichung ablesen.

Damit haben alle Bausteile zusammen und können das Ergebnis dieses Abschnitts im folgenden Satz zusammenfassen:

Satz: Die charakteristische Gleichung

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$$

der Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1\dot y(t)+a_0y(t)=0$$

habe die Nullstellen $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$; die Vielfachheit der Nullstelle λ_i sei α_i. Dann bilden die Lösungen der Differentialgleichung einen n-dimensionalen Vektorraum V mit Basis

$$\left\{e^{\lambda_1t},te^{\lambda_1t},\ldots,t^{\alpha_1-1}e^{\lambda_1t},\quad\ldots\quad e^{\lambda_rt},te^{\lambda_rt},\ldots,t^{\alpha_r-1}e^{\lambda_rt}\right\}.$$

Für jedes $t_0\in\mathbb{R}$ ist die lineare Abbildung

$$V\to\mathbb{C}^n;\quad y\mapsto\left(y(t_0),\dot y(t_0),\ddot y(t_0),\ldots,y^{(n-1)}(t_0)\right)$$

ein Isomorphismus; insbesondere ist jedes Anfangswertproblem

$$y(t_0)=c_0,\quad \dot y(t_0)=c_1,\quad\ldots\quad y^{(n-1)}(t_0)=c_{n-1}$$

eindeutig lösbar.

■

Sofern wir uns für komplexwertige Lösungen interessieren, liefert uns dieser Satz alles was wir brauchen. Bei vielen Anwendungen hat man es aber mit Gleichungen mit reellen Koeffizienten zu tun, und von der Natur des Problems her interessieren nur reelle Lösungen. Mit unserem bisherigen Ansatz kommen wir auch bei diesen Problemen nicht um komplexe Lösungen herum; beispielsweise hat die wohlbekannte Differentialgleichung

$$\ddot y(t)+y(t)=0$$

die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2+1=0$$

mit den beiden rein imaginären Lösungen $\lambda=\pm i$, die oben angegebene Basis des Lösungsraums ist also

$$\left\{e^{it},\ e^{-it}\right\}.$$

Falls wir noch nie etwas vom obigen Satz gehört hätten, würden wir stattdessen sagen, daß die Lösungen dieser Differentialgleichung genau die Linearkombinationen von Sinus und Cosinus sind, Basis des Lösungsraums ist also

$$\left\{\sin t,\ \cos t\right\}.$$

Über $\mathbb{C}$ sind beide Aussagen äquivalent, denn auf Grund der EULERschen Formeln

$$\cos t=\frac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right)\quad\text{und}\quad\sin t=\frac{1}{2i}\left(e^{it}ie^{-it}\right)$$

bzw.

$$e^{it}=\cos t+i\sin t\quad\text{und}\quad e^{-it}=\cos t-i\sin t$$

erzeugen beide Basen denselben $\mathbb{C}$-Vektorraum. Wenn wir an reellen Lösungen interessiert sind, ist aber die zweite Basis erheblich nützlicher, denn sie erzeugt auch den $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Lösungen.

Entsprechend hätten wie auch für allgemeinere Differentialgleichungen mit reellen Koeffizienten gerne eine $\mathbb{C}$-Basis des (komplexen) Lösungsraums, die gleichzeitig $\mathbb{R}$-Basis des reellen Lösungsraums ist. Im Rest dieses Abschnitts wollen wir uns überlegen, wie wir diese Basis konstruieren können.

Wir gehen also aus von einer Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad a_i \in \mathbb{R}$$

und betrachten zunächst wieder die charakteristische Gleichung

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0\,.$$

Diese *kann* reelle Lösungen haben; diese bezeichnen wir mit λ_1 bis λ_p, und falls es keine gibt, setzen wir $p = 0$.

Falls p gleich der Gesamtzahl r der Nullstellen der charakteristischen Gleichung ist, sind wir fertig: Die Funktionen $t^j e^{\lambda_i t}$ sind allesamt reell, und die, bei denen j kleiner als die Vielfachheit der Nullstelle λ_i ist, spannen sowohl den komplexen als auch den reellen Lösungsraum auf.

Andernfalls gibt es auch noch nichtreelle Nullstellen. Für jede solche Nullstelle λ ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle, denn da die Koeffizienten a_i reell sind, ist $\overline{a_i} = a_i$ und damit

$$\overline{\lambda}^n + a_{n-1}\overline{\lambda}^{n-1} + \ldots + a_1\overline{\lambda} + a_0 = \overline{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0} = 0\,.$$

Nichtreelle Nullstellen treten also immer auf als Paare konjugiert komplexer Zahlen; außerdem haben λ und $\overline{\lambda}$ dieselbe Vielfachheit, denn eine Nullstelle ist genau dann eine r-fache Nullstelle eines Polynoms P, wenn sie Nullstelle von P und allen seinen Ableitungen bis zur $(r-1)$-ten ist. Da auch alle diese Ableitungen Polynome mit reellen Koeffizienten sind, zeigt die gleiche Rechnung wie oben, daß $P^{(j)}(\lambda)$ genau dann verschwindet, wenn auch $P^{(j)}(\overline{\lambda})$ verschwindet.

Wir fassen daher die nichtreellen Nullstellen zu Paaren $\left(\lambda_{p+j}, \overline{\lambda_{p+j}}\right)$ zusammen, wobei j von 1 bis zur Anzahl q dieser Paare läuft; die Gesamtzahl der Nullstellen ist also $r = p + 2q$.

Die Vielfachheit der Nullstelle λ_k sei weiterhin mit α_k bezeichnet; für $k > p$ ist das gleichzeitig auch die Vielfachheit der Nullstelle $\overline{\lambda}_k$.

Für $k > p$ wenden wir, genau wie im obigen Beispiel, die EULERschen Formeln an: Für

$$\lambda_k = \mu_k + i\nu_k \quad \text{mit} \quad \mu_k, \nu_k \in \mathbb{R}$$

ist

$$e^{\lambda_k t} = e^{\mu_k t}\left(\cos\nu_k t + i\sin\nu_k t\right) \quad \text{und} \quad e^{\overline{\lambda_k} t} = e^{\mu_k t}\left(\cos\nu_k t - i\sin\nu_k t\right),$$

genauso ist für jedes j

$$t^j e^{\lambda_k t} = t^j e^{\mu_k t}\left(\cos\nu_k t + i\sin\nu_k t\right)$$

und

$$t^j e^{\overline{\lambda_k} t} = t^j e^{\mu_k t}\left(\cos\nu_k t - i\sin\nu_k t\right).$$

Also spannt

$$\left\{t^j e^{\lambda_k t},\ t^j e^{\overline{\lambda_k t}}\right\}$$

denselben $\mathbb{C}$-Vektorraum auf wie

$$\left\{t^j e^{\mu_k t}\cos\nu_k t,\ t^j e^{\mu_k t}\sin\nu_k t\right\},$$

und letztere Basis spannt gleichzeitig den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reeller Funktionen aus diesem $\mathbb{C}$-Vektorraum auf.

Damit können wir auch eine Basis des reellen Lösungsraums angeben:

Satz: Die charakteristische Gleichung

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

der Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = 0$$

habe die reellen Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sowie die Paare konjugiert komplexer Nullstellen $\left(\lambda_{p+1}, \overline{\lambda_{p+1}}\right), \ldots, \left(\lambda_{p+q}, \overline{\lambda_{p+q}}\right)$ mit $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$; die Vielfachheit der Nullstelle λ_i sei α_i. Dann bilden die Lösungen der Differentialgleichung einen n-dimensionalen Vektorraum V, der aufgespannt wird von den Funktionen

$$t^j e^{\lambda_i t} \quad \text{für } i = 1, \dots, p$$

und

$$t^j e^{\mu_i t} \cos \nu_i t, \quad t^j e^{\mu_i t} \sin \nu_i t \quad \text{für } i = p+1, \dots, p+q\,,$$

wobei j jeweils von null bis $\alpha_i - 1$ läuft. Für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ ist die lineare Abbildung

$$V \to \mathbb{R}^n; \quad y \mapsto \big(y(t_0), \dot y(t_0), \ddot y(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)\big)$$

ein Isomorphismus; insbesondere ist jedes Anfangswertproblem

$$y(t_0) = c_0, \quad \dot y(t_0) = c_1, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(t_0)$$

eindeutig lösbar.

■

e) Inhomogene Differentialgleichungen

Am Beispiel der Schwingungsdifferentialgleichungen haben wir gesehen, daß zur Beschreibung interessanter Phänomene homogene Differentialgleichungen oft nicht ausreichen; sobald etwa ein elektrischer Schwingkreis eine Stromquelle enthält, haben wir eine inhomogene Differentialgleichungen.

Wie schon im Falle der Schwingungsdifferentialgleichungen genügt es zur Lösung einer allgemeinen inhomogenen linearen Differentialgleichung, den Lösungsraum der zugehörigen homogenen Differentialgleichung zu kennen und dazu noch *eine* Lösung der inhomogenen, denn wegen der Linearität der linken Seite ist die Differenz zweier Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung Lösung der homogenen.

Wir kennen bereits eine Methode, uns eine solche spezielle Lösung zu verschaffen: Sobald wir uns Anfangswerte vorgeben, können wir die entsprechende Lösung des inhomogenen Problems mittels LAPLACE-Transformation finden – sofern wir die LAPLACE-Transformierte des inhomogenen Anteils kennen und aus der LAPLACE-Transformierten der Lösungsfunktion diese Funktion selbst bestimmen können. In vielen

praktisch relevanten Fällen wird dies mit Hilfe von Tabellen möglich sein, sofern man nur die grundlegenden Regeln für den Umgang mit LAPLACE-Transformationen kennt.

Eine zweite Methode ist das *Erraten* einer Lösung. In der Praxis betrachtet man Differentialgleichungen meist, um das künftige Verhalten eines Systems vorauszusagen, und oft wird man (leider nicht immer richtige!) ungefähre Erwartungen haben, wie dieses Verhalten aussehen sollte. Falls man diese als Ansatz mit unbestimmten Parametern in die Differentialgleichung einsetzt und die Erwartungen richtig war, kann man die Parameter bestimmen und hat eine Lösung gefunden; andernfalls muß man sich etwas neues überlegen.

Als Beispiel betrachten wir nochmals die Differentialgleichung

$$\ddot y(t) + \rho \dot y(t) + \sigma y(t) = f(t)\,.$$

Wir kamen auf diese Differentialgleichung bei der betrachtung eines elektrischen Schwingkreises, an den eine externe Spannung proportional $f(t)$ angelegt war, und für vernünftiges $f(t)$ sollte man erwarten, daß es Lösungen gibt, bei denen sich $y(t)$ völlig von $f(t)$ bestimmen läßt und daher von ähnlicher Gestalt ist.

Im Falle einer Gleichstromquelle $f(t) = c$ vermuten wir, daß es vielleicht eine Lösung gibt, bei der nur ein Gleichstrom fließt. Der Ansatz $y(t) = a$ führt auf

$$\sigma a = c \quad \text{oder} \quad a = \frac{c}{\sigma}\,,$$

falls $\sigma \neq 0$ ist.

Für $\sigma = 0$ haben wir *de facto* eine Differentialgleichung für $\dot y(t)$ statt für $y(t)$; man könnte es daher mit einem Ansatz der Form $\dot y(t) = b$ oder $y(t) = bt + a$ versuchen; für $\rho \neq 0$ führt das zu

$$\rho b = c \quad \text{oder} \quad b = \frac{c}{\rho}\,;$$

a ist hier natürlich beliebig.

Entsprechend können wir auch bei einer angelegten Wechselspannung vorgehen: Der Schwingkreis wird sicherlich die Amplitude und die Phase verändern, aber die permanent angelegte Wechselspannung sollte doch dem Schwingkreis ihre Frequenz aufzwingen, so daß es zumindest eine Lösung geben sollte, die eine reine Schwingung mit dieser Frequenz ist. Für

$$\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + \sigma y(t) = A\cos\omega_0 t$$

versuchen wir es also mit

$$y(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t$$

und berechnen die Ableitungen:

$$\dot{y}(t) = -a\omega_0\sin\omega_0 t + b\omega_0\cos\omega_0 t$$

und

$$\ddot{y}(t) = -a\omega_0^2\cos\omega_0 t - b\omega_0^2\sin\omega_0 t\,.$$

Einsetzen in die linke Seite der Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned}&\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + \sigma y(t)\\ &= (-a\omega_0^2 + \rho b\omega_0 + \sigma a)\cos\omega_0 t + (-b\omega_0^2 - \rho a\omega_0 + \sigma b)\sin\omega_0 t\,,\end{aligned}$$

und das ist gleich $A\cos\omega_0 t$, falls

$$(\sigma - \omega_0^2)a + \rho\omega_0 b = A \quad \text{und} \quad (\sigma - \omega_0^2)b - \rho\omega_0 a = 0$$

ist.

Für $\sigma = \omega_0^2$ ist dies problemlos zu lösen: Dann ist einfach

$$a = 0 \quad \text{und} \quad b = \frac{A}{\rho\omega_0}\,.$$

Für $\sigma \neq \omega_0^2$ können wir die zweite Gleichung durch $(\sigma - \omega_0^2)$ dividieren und erhalten

$$b = \frac{\rho\omega_0}{\sigma - \omega_0^2}a\,.$$

Dies können wir in die erste Gleichung einsetzen:

$$(\sigma - \omega_0^2)a + \rho\omega_0\frac{\rho\omega_0}{\sigma - \omega_0^2}a = \frac{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2}{\sigma - \omega_0^2}a = A$$

oder

$$a = \frac{A(\sigma - \omega_0^2)}{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2} \quad \text{und} \quad b = \frac{A\rho\omega_0}{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2}\,.$$

In beiden Fällen gibt es also in der Tat eine Lösung der postulierten Form, die wir hiermit explizit bestimmt haben.

Im Prinzip haben wir diese Lösung bereits in §1*c)* berechnet, mit dem Ansatz hier ist die Situation nun aber sehr viel übersichtlicher: Im häufigsten Falle, in dem die homogene Gleichung eine gedämpfte Schwingung beschreibt etwa wissen wir nun, daß es eine feste reine Schwingung mit der erregenden Frequenz gibt, gegen die *alle* Lösungen der Differentialgleichung langfristig konvergieren.

Für allgemeinen Aussagen ist also dieser Ansatz besser geeignet; falls wir dagegen ein konkretes Anfangswertproblem lösen wollen, liefert die LAPLACE-Transformation direkt die Lösung, während wir beim Weg über die allgemeine Lösung noch ein lineares Gleichungssystem lösen müssen, um die freien Parameter der allgemeinen Lösung an vorgegebene Anfangswerte anzupassen. (Falls man freilich die inversen LAPLACE-Transformationen über Partialbruchzerlegung wirklich konkret berechnet, wird man oft auf genau dasselbe lineare Gleichungssystem stoßen, das man zur Anpassung der allgemeinen Lösung an konkrete Anfangsbedingungen lösen muß.)

Falls man einigermaßen konkrete Erwartungen über das Verhalten zumindest einer Lösungsfunktion hat, ist das Erraten einer speziellen Lösung also oft erfolgversprechend. Das in §1*c)* behandelte Beispiel der Resonanzkatastrophe zeigt aber, daß es auch Fälle gibt, wo man nur mit ziemlicher Erfahrung eine spezielle Lösung erraten kann: Die Gleichung

$$\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \cos\omega_0 t$$

hat schließlich *keine* Lösung, die eine reine Schwingung der Frequenz ω_0 ist.

Zum Glück gibt es außer LAPLACE-Transformation und Erraten noch ein drittes, rein formales Verfahren, das ebenfalls häufig zum Ziel führt, die bereits von den linearen Differentialgleichung erster Ordnung her bekannte *Variation der Konstanten.* Die Grundidee ist einfach: Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung hängt von Parametern c_i ab; man ersetze diese Parameter durch Funktionen $c_i(t)$ und setze dies ein in die inhomogene Gleichung. Dies stellt Bedingungen an die $c_i(t)$;

falls man die entstehende Differentialgleichung lösen kann, hat man eine Lösung der inhomogenen Gleichung gefunden.

Betrachten wir als Beispiel die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) - y(t) = 6 \sinh t .$$

Erraten einer speziellen Lösung nach dem Motto, daß diese so ähnlich aussehen sollte wie die rechte Seite führt hier auf den Ansatz

$$y(t) = a \cosh t + b \sinh t ,$$

und der führt definitiv nicht zum Erfolg, da für jede solche Funktion die linke Seite gleich null ist.

Probieren wir es also mit Variation der Konstanten: Der obige Ansatz ist gleichzeitig die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (und konnte genau deshalb auch unmöglich zu einer Lösung der inhomogenen Gleichung führen); durch Variation der Konstanten wird diese Lösung zu

$$y(t) = a(t) \cosh t + b(t) \sinh t .$$

Differenzieren führt auf

$$\dot{y}(t) = \dot{a}(t) \cosh t + a(t) \sinh t + \dot{b}(t) \sinh t + b(t) \cosh t$$

und

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) = \ddot{a}(t) \cosh t + 2\dot{a}(t) \sinh t + a(t) \cosh t \\ + \ddot{b}(t) \sinh t + 2\dot{b}(t) \cosh t + b(t) \sinh t ; \end{aligned}$$

einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\big(\ddot{a}(t) + 2\dot{b}(t)\big) \cosh t + \big(\ddot{b}(t) + 2\dot{a}(t)\big) \sinh t = 6 \sinh t ,$$

und damit können wir offensichtlich nicht sonderlich viel anfangen.

Trotzdem führt die Methode der Variation der Konstanten auch hier zum Erfolg, wir müssen nur die Differentialgleichung umschreiben in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung, also in

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= z(t) \\ \dot{z}(t) &= y(t) + 6 \sinh t . \end{aligned}$$

Dies ist ein System der allgemeinen Form

$$\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t) + \vec{b}(t)$$

mit einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und einem Vektor $\vec{b}(t)$ von Funktionen $b_i(t)$; bevor wir das spezielle Problem lösen, wollen uns überlegen, daß die Methode der Variation der Konstanten sogar das allgemeine Problem lösen kann.

Die Lösungsmenge des homogenen Systems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ besteht aus den Funktionen $e^{At}\vec{u}$ mit einem beliebigen Vektor $\vec{u} \in \mathbb{C}^n$; Variation der Konstanten bedeutet, daß dieser konstante Vektor durch einen Vektor $\vec{u}(t)$ von Funktionen ersetzt wird, d.h. wir machen den Ansatz

$$\vec{y}(t) = e^{At}\vec{u}(t) .$$

Da die LEIBNIZsche Produktregel auch für matrixwertige Funktionen gilt, ist

$$\dot{\vec{y}}(t) = Ae^{At}\vec{u}(t) + e^{At}\dot{\vec{u}}(t) = A\vec{y}(t) + e^{At}\dot{\vec{u}}(t) ;$$

der Ansatz führt also genau dann auf eine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t) + \vec{b}(t) ,$$

wenn

$$\vec{b}(t) = e^{At}\dot{\vec{u}}(t) \quad \text{oder} \quad \dot{\vec{u}} = e^{-At}\vec{b}(t)$$

ist. Damit können wir die Komponenten von $\vec{u}(t)$ als Stammfunktionen der Komponenten des ganz rechts stehenden Vektors von Funktionen berechnen. Zur Vereinfachung der Schreibweise vereinbaren wir, daß für eine vektorwertige Funktion $\vec{v}(t)$ gelten soll

$$\int \vec{v}(t)\,dt = \begin{pmatrix} \int v_1(t)\,dt \\ \vdots \\ \int v_n(t)\,dt \end{pmatrix} \quad \text{falls} \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix} .$$

Dann ist

$$\vec{u}(t) = \int e^{-At}\vec{b}(t)\,dt ,$$

und wir haben eine spezielle Lösung gefunden. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ist daher

$$\vec{y}(t) = e^{At}\left(\int e^{-At}\vec{b}(t)\,dt\right) + e^{At}\vec{v}_0$$

mit einem beliebigen konstanten Vektor $\vec{v}_0$.

Mit dieser Methode läßt sich nun auch die oben betrachtete Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) - y(t) = 6\sinh t$$

lösen: Das dazu äquivalente System

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= z(t)\\ \dot{z}(t) &= y(t) + 6\sinh t\end{aligned}$$

ist von der Form $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t) + \vec{b}(t)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6\sinh t \end{pmatrix} \;;$$

wir benötigen zunächst

$$\vec{u}(t) = \int e^{-At}\vec{b}(t)\,dt\,.$$

Wie wir bereits zu Beginn von Abschnitt *e)* gesehen haben, ist A^2 die Einheitsmatrix und somit

$$e^A = \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix} \;;$$

im wesentlichen die gleiche Rechnung zeigt, daß

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

und

$$e^{-At} = \begin{pmatrix} \cosh(-t) & \sinh(-t) \\ \sinh(-t) & \cosh(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

ist. Wir brauchen die Funktion

$$e^{-At}\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 6\sinh t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\sinh^2 t \\ 6\sinh t\cosh t \end{pmatrix}$$

und müssen diese integrieren.

Beginnen wir mit dem ersten Eintrag:

$$\begin{aligned}\int -6\sinh^2 t\,dt &= -6\int\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 dt = -\frac{3}{2}\int(e^{2t} + e^{-2t} - 2)\,dt\\ &= -\frac{3}{2}\left(\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} - 2t\right) + C\\ &= -\frac{3}{4}(e^t - e^{-t})(e^t + e^{-t}) + 3t + C'\\ &= -3\sinh t\cosh t + 3t + C'\,.\end{aligned}$$

Genauso finden wir auch eine Stammfunktion des zweiten Eintrags:

$$\begin{aligned}\int 6\sinh t\cosh t\,dt &= \frac{3}{2}\int(e^{2t} - e^{-2t})\,dt\\ &= \frac{3}{4}\left(e^{2t} + e^{-2t}\right) + C\\ &= \frac{3}{4}\left(e^{2t} + 2 + e^{-2t}\right) + C - \frac{3}{2}\\ &= 3\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 + C' = 3\cosh^2 t + C'\,.\end{aligned}$$

Da wir nur eine spezielle Lösung brauchen, können wir die beiden Integrationskonstanten unbesorgt auf null setzen; jede andere Wahl würde nur bedeuten, daß wir eine Lösung der homogenen Gleichung dazuaddieren. Also arbeiten wir mit

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} -3\sinh t\cosh t + 3t \\ 3\cosh^2 t \end{pmatrix}$$