### i) Fraunhofer-Beugung

Wenn Licht auf Strukturen trifft, in Vergleich zu deren Größe seine Wellenlänge nicht mehr vernachlässigbar klein ist, lassen sich die Gesetze der geometrischen Optik bekanntlich nicht mehr anwenden; man beobachtet dann Beugungsphänomene.

Beugung ist ein sehr komplexes Gebiet; für ein Beispiel im Rahmen einer Vorlesung über Höhere Mathematik müssen wir uns auf den allereinfachsten Fall beschränken. Wir gehen daher aus von einem Lichtstrahl, der aus sehr großer Entfernung kommt oder der zumindest (z.B. dank einer Linse, aus deren Brennpunkt er kommt) so aussieht, und beobachten auch die Beugungsfigur in großer Entfernung. Diese Situation bezeichnet man als FRAUNHOFER-Beugung.

JOSEPH VON FRAUNHOFER (1787–1826) wurde in Straubing als elftes und letztes Kind eines Glasermeisters geboren; er machte auch selbst eine Lehre als Glasschleifer und Spiegelmacher. Daneben besuchte er die Feierabendschule, wo er zumindest primitive Grundkenntnisse im Rechnen erwarb. 1806 kam er an das optische Institut von UTZSCHNEIDER, der ihm Bücher über Optik und Mathematik besorgte. FRAUNHOFER entwickelte Präzisionsmaschinen zur Fertigung optischer Instrumente von bis dahin nicht gekannter Qualität und erfand auch das optische Gitter. Durch seine Versuche zur Lichtbeugung bewies er die Wellennatur des Lichts. 1824 wurde er zum Professor ernannt, der in Sonntagsvorlesungen über seine Arbeit berichtete; im gleichen Jahr wurde er auch vom bayrischen König LUDWIG I. in den Adelsstand erhoben. Zwei Jahre später starb er an Tuberkulose.

Zur mathematischen Behandlung der optischen Beugung brauchen wir zunächst ein physikalisches Modell für Lichtwellen. Für eine physikalisch korrekte Beschreibung müssen wir Licht als zeitlich veränderliches elektromagnetisches Feld betrachten, d.h. wir brauchen zwei räumlich und zeitlich variable Vektorfelder $\vec{E}(x, y, z; t)$ und $\vec{B}(x, y, z; t)$, die den MAXWELLschen Gleichungen genügen. Glücklicherweise muß man in der Optik aber nur selten so weit gehen: Zwar hängt die Beugung an einem Spalt theoretisch durchaus von der Leitfähigkeit des verwendeten Materials ab, aber diese Abhängigkeit ist so gering, daß man sie für alle praktischen Zwecke vernachlässigen kann.



Man arbeitet daher in der Wellenoptik gerne mit einer sogenannten *skalaren Welle,* über deren physikalische Bedeutung man sich keine sonderlichen Gedanken macht. Aus rechnerischen Gründen betrachtet man sie als komplexwertige Funktion; falls man sich unbedingt etwas darunter vorstellen will, kann man beispielsweise den Realteil dieser Funktion als die $x$-Komponente des elektrischen Felds interpretieren, muß dann aber beachten, daß eine skalare Welle im Gegensatz zu einem elektrischen Feld *keine* Wechselwirkung mit Materie egal welcher Leitfähigkeit zeigt – das ist eine der Idealisierungen hinter dem Konzept der skalaren Welle. Wichtig für uns ist nur, daß die Intensität der Welle (also z.B. die Intensität der Beugungslinien, die wir auf einem Schirm beobachten) gleich dem Betragsquadrat der Wellenfunktion sein soll.

Eine Welle hat eine räumliche wie auch zeitliche Periodizität. Zeitlich periodische Vorgänge kennen wir bereits: Das sind Schwingungen, die mathematisch durch Funktionen der Art

$$f(t) = A_0 e^{i\omega t} \quad \text{oder etwas allgemeiner} \quad f(t) = A_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$$

beschrieben werden, wobei die Phasenverschiebung $\varphi$ dafür sorgt, daß wir auch Schwingungen behanden können, die ihre maximale Auslenkung nicht zur Zeit $t = 0$ erreichen. Wir wollen dies jedoch im folgenden ignorieren und mit der einfacheren ersten Funktion arbeiten.

Für räumlich periodische Vorgänge haben wir entsprechend zur Periode $T$ einer Schwingung eine Wellenlänge $\lambda$; das Analogon zur Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ bezeichnen wir als

$$\textit{Wellenzahl} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}\,.$$

Ein eindimensionaler periodischer Vorgang kann somit beschrieben werden durch eine Funktion

$$g(x) = A_0 e^{ikx}\,.$$

Im Mehrdimensionalen müssen wir die Wellenzahl $k$ ersetzen durch einen Vektor $\vec{k}$ der Länge $k$, den *Wellenzahlvektor,* und betrachten die Funktion

$$g(\boldsymbol{x}) = A_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\,.$$

(Die Wellenlänge betrachten wir weiterhin nur als Skalar.)

Eine Welle soll zeitlich *und* räumlich periodisch sein; dies leistet die Funktion

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = A_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$$

oder natürlich auch die entsprechende Funktion mit einem Pluszeichen im Exponenten. Der Grund, warum wir das Minuszeichen bevorzugen, ist folgender:

Im eindimensionalen Fall ist

$$\psi(x,t) A_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} = A_0 e^{ik\left(\frac{\omega}{k}t - x\right)} ,$$

$\psi(x,t)$ hängt also nur ab von $x - \frac{\omega}{k}t$. Dies können wir auch so interpretieren, daß

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda\omega}{2\pi}$$

die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist; denn eine Änderung der Zeit um $\Delta t$ hat denselben Effekt wie eine Änderung des Orts um $v \cdot \Delta t$.

Im Falle mehrerer räumlicher Dimensionen ist alles grundsätzlich genauso, nur die Schreibweise ist etwas komplizierter: Ist $\vec{k}_0$ ein Einheitsvektor in Richtung von $\vec{k}$, d.h. $\vec{k} = k \cdot \vec{k}_0$, so ist

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = A_0 e^{ik\left(\frac{\omega}{k}t - \vec{k}_0\cdot\vec{x}\right)} ;$$

dabei ist $\vec{k}_0 \cdot \vec{x}$ die $\vec{x}$-Komponente in Richtung von $\vec{k}$. Damit ist $\vec{k}_0$ die *Richtung* des Geschwindigkeitsvektors; der Wellenzahlvektor zeigt also in Richtung der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, und der Betrag $v$ des Geschwindigkeitsvektors ist durch obige Formel gegeben.

Die Annahme einer konstanten Amplitude $A_0$ in obigen Formeln ist nur in seltenen Fällen realistisch: Licht kommt meist aus einer (zumindest in erster Näherung) punktförmigen Lichtquelle, und seine Intensität nimmt mit dem Quadrat der Entfernung ab. Da die Intensität das Betragsquadrat der Wellenfunktion sein soll, müssen wir eine solche Kugelwelle also in der Form

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{A_0}{|\vec{x}|} e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$$

ansetzen, sofern die Lichtquelle im Nullpunkt des Koordinatensystems sitzt.



Im Falle einer weit entfernten Lichtquelle, wie wir sie bei der FRAUNHOFER-Beugung annehmen und auch von der Sonne her kennen, spielt allerdings die Ortsabhängigkeit der Amplitude praktisch keine Rolle, so daß wir keinen nennenswerten Fehler machen, wenn wir sie als konstant annehmen. In diesem Fall sprechen wir von einer *ebenen* Welle.

Ausgangspunkt für die Berechnung von Beugungsbilder ist das HUYGENSsche Prinzip: Jeder Punkt des Hindernisses ist Quelle einer Kugelwelle, deren Amplitude gleich der Amplitude der einfallenden Welle mal der Durchlässigkeitsfunktion $\alpha$ des Hindernisses im betrachteten Punkt ist. Letztere gibt an, welcher Teil des Lichts durchgelassen wird; sie ist also eins an den Stellen, an denen alles Licht durchkommt, und null dort, wo nichts durchkommt. An Stellen, an denen ein Teil des Lichts durchgelassen wird, kann sie auch Zwischenwerte annehmen.

CHRISTIAAN HUYGENS (1629–1695) kam aus einer niederländischen Diplomatenfamilie. Dadurch und später auch durch seine Arbeit hatte er Kontakte zu führenden europäischen Wissenschaftlern wie DESCARTES und PASCAL. Nach seinem Studium der Mathematik und Jura arbeitete er teilweise auch selbst als Diplomat, interessierte sich aber bald vor allem für Astronomie und den Bau der dazu notwendigen Instrumente. Er entwickelte eine neue Methode zum Schleifen von Linsen und erhielt ein Patent für die erste Pendeluhr. Trotz des französisch-niederländischen Kriegs arbeitete er einen großen Teil seines Lebens an der *Académie Royale des Sciences* in Paris, wo beispielsweise LEIBNIZ viel Mathematik bei ihm lernte. HUYGENS war ein scharfer Kritiker sowohl von NEWTONs Theorie des Lichts als auch seiner Gravitationstheorie, die er für absurd und nutzlos hielt. Gegen Ende seines Lebens beschäftigte er sich mit der Möglichkeit außerirdischen Lebens.

Bei der FRAUNHOFER-Beugung betrachten wir auch die gebeugten Wellen nur aus sehr großer Entfernung und können daher statt von Kugelwellen von ebenen Wellen ausgehen. Außerdem können wir die Zeitabhängigkeit der Welle ignorieren, denn die Frequenzen, mit denen das sichtbare Licht schwingt, liegen um Größenordnungen jenseits sowohl unserer Reaktionszeit als auch der unserer Meßinstrumente, so daß wir nur die Amplituden messen können. Schreiben wir die einfallende Welle als $\psi(\boldsymbol{x},t) = A_0 e^{-i\vec{k}\vec{x}} \cdot e^{i\omega t}$, ist also der zweite Faktor eine zeitabhängige Phasenvariation, die wir bei der Berechnung des räumlichen Intensitätsverteilung des Beugungsbilds ignorieren können.

Eine weitere Konsequenz des (auch im Vergleich zur Größe des Hindernisses) weit entfernten Betrachtungspunkts ist, daß wir das Hindernis vom Schirm aus praktisch nur als Punkt sehen; was an einer gegebenen Stelle des Schirms ankommt, hängt also im wesentlichen nur ab vom Winkel $\theta$ oder (im Zweidimensionalen) den Winkeln $\theta$ und $\varphi$, unter dem (oder denen) die Strahlen von diesem „Punkt“ ausgehen.

Um die Intensität des Beugungsbilds in einem gegebenen Punkt zu berechnen, müssen wir also alle vom Hindernis in einem festen Winkel ausgehenden Strahlen aufsummieren, und *hierbei* müssen wir auch die Phasen berücksichtigen, da diese Strahlen miteinander interferieren. Abbildung zehn zeigt, wie sich die Laufwege zweier benachbarter Strahlen unterscheiden, und diese Differenzen können wir nicht vernachlässigen, da sie in der Größenordnung des Hindernisses und damit auch der Wellenlänge des Lichts liegen.

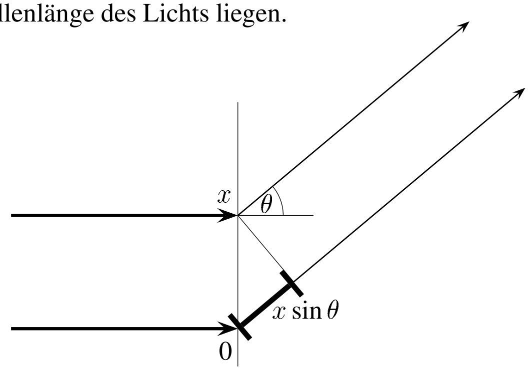



Abb. 10: Laufwegunterschied zweier paralleler Strahlen

Betrachten wir zunächst den (in Abbildung zehn dargestellten) eindimensionalen Fall. Verglichen mit dem Strahl, der von einem (irgendwie gewählten) Nullpunkt des Hindernisses ausgeht, hat der Strahl mit Ausgangspunkt in Entfernung $x$ einen Laufwegunterschied von $x \sin\theta$; dies



entspricht einem Phasenfaktor von $e^{-ik\sin\theta}$. Wählen wir also die Phase im Nullpunkt als Referenz (die wir in den zu ignorierenden Phasenfaktor der einfallenden Welle hineinziehen können), ist die Summe aller unter dem Winkel $\theta$ abgehenden Strahlen gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) e^{-ik\sin\theta}\, dx\ ;$$

das ist gleich der FOURIER-Transformierten von $\alpha(x)$, ausgewertet im Punkt $u = k\sin\theta$.

Bei einem zweidimensionalen Hindernis müssen entsprechend zwei Winkelvariablen $\theta$ und $\phi$ berücksichtigt werden, und auch die Durchlässigkeitsfunktion $\alpha$ hängt von zwei Variablen $x, y$ ab; außerdem müssen wir nun vom Wellenzahlvektor sowohl die $x$- auch auch die $y$-Komponente berücksichtigen. Wir erhalten daher als Summe aller Strahlen unter den beiden gegeben Winkeln das Integral

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \alpha(x,y) e^{-i(k_1\sin\theta + k_2\sin\phi)}\, dx\, dy\ ,$$

d.h. die zweidimensionale FOURIER-Transformierte von $\alpha$, ausgewertet im Punkt $(u,\ v) = (k_1\sin\theta,\ k_2\sin\varphi)$.

Zur Vereinfachung der Schreibweise drückt man das Beugungsbild meist einfach in der Variablen $u$ *bzw.* den Variablen $u$ und $v$ aus statt in den Winkelvariablen; dann ist das Beugungsbild eines Hindernisses mit Durchlässigkeitsfunktion $\alpha$ somit einfach die FOURIER-Transformierte von $\alpha$. Allerdings muß man dabei beachten, daß $u$ und $v$, obwohl man sie als Strecken interpretieren kann, *nicht* proportional zu den Strecken sind, die man auf einem ebenen Schirm messen kann: Deren Längen sind proportional zu $\tan\theta$ und $\tan\varphi$.

Dies wollen wir anwenden, um als erstes das Beugungsbild eines Spalts zu berechnen. Dieser habe die Breite $a$; seine Durchlässigkeitsfunktion kann also beispielsweise geschrieben werden als

$$\alpha\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Damit ist

$$\widehat{\alpha}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)e^{-uix}\,dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-iux}\,dx$$
$$= \frac{e^{-\frac{iau}{2}} - e^{\frac{iau}{2}}}{-iu} = \frac{2\sin\frac{au}{2}}{u} = a\frac{\sin\frac{au}{2}}{\frac{au}{2}} = a\operatorname{sinc}\frac{au}{2}\,.$$

Dies erklärt, warum die Funktion sinc $x$ auch als *Spaltfunktion* bezeichnet wird.

Die Lichtintensitäten, die man im Beugungsbild beobachtet, sind allerdings *nicht* durch diese Funktion gegeben: $\widehat{\alpha}(u)$ ist die Amplitude einer skalaren Welle; die Intensität ist gleich dem Quadrat davon.

Als nächstes Beispiel betrachten wir Beugung an einem regelmäßigen Strichgitter. Der Abstand zweier Striche sei $d$ und es gebe insgesamt $2N+1$ Striche. Wenn wir in erster Näherung die Breite der Striche vernachlässigen, können wir die Durchlässigkeitsfunktion $\alpha$ als Summe von $\delta$-Distributionen schreiben:

$$\alpha(t) = \sum_{k=-N}^{N} \delta(x-kd)\,.$$

Das Beugungsbild ist somit gegeben durch

$$\widehat{\alpha}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)e^{-iux}\,dx = \sum_{k=-N}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-kd)e^{-iux}\,dx$$
$$= \sum_{k=-N}^{N} e^{-iudk} = \sum_{k=-N}^{N} e^{iukd} = e^{-iuNd}\sum_{k=0}^{2N} e^{iukd}$$
$$= e^{-iuNd}\frac{1-e^{iu(2N+1)d}}{1-e^{iud}} = \frac{e^{-iuNd}-e^{iu(N+1)d}}{1-e^{iud}}$$
$$= \frac{e^{iu(N+\frac12)d}-e^{-iu(N+\frac12)d}}{e^{iu\frac d2}-e^{-iu\frac d2}} = \frac{\sin u\left(N+\frac12\right)d}{\sin\frac{ud}{2}}\,.$$



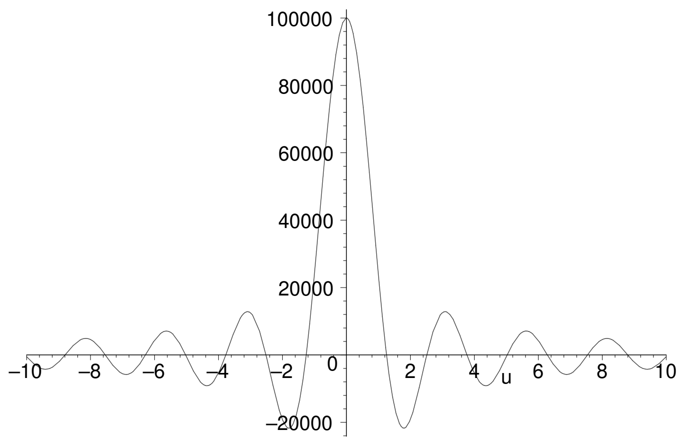



Abb. 11: Beugung am Gitter

Abbildung elf zeigt diese Funktion; man sieht ihr das charakteristische Linienmuster an, das man bei der Beugung am Gitter beobachtet.

Trotzdem wird vielleicht einigen Lesern unwohl sein beim Gedanken an eine Summe von $\delta$-Distributionen als Durchlässigkeitsfunktion. Deshalb wollen wir zur Sicherheit nachrechnen, was sich ändert, wenn wir stattdessen die Striche als Spalte der Breite $a$ annehmen.

Für einen einzelnen solchen Spalt haben wir dann die oben betrachtete Durchlässigkeitsfunktion

$$\alpha_a\colon \begin{cases} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac a2 \le x \le \frac a2 \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\end{cases}$$

eines Spalts der Breite $a$, und die Durchlässigkeitsfunktion des gesamten Strichgitters ist die Faltung $\alpha \star \alpha_a$ dieser Funktion mit der gerade betrachteten Funktion $\psi$. Das Beugungsbild ist somit gegeben durch das Produkt des gerade berechneten Beugungsbilds mit dem Beugungsbild eines Spalts, also durch

$$\frac{\sin u\left(N+\frac12\right)d}{\sin\frac{ud}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{au}{2}}{\frac u2}\,.$$

Da der Abstand zwischen zwei Spaltmitten gleich $d$ ist, muß die Spaltbreite $a$ echt kleiner als $d$ sein, und die Anzahl $N$ der Striche im Gitter liegt typischerweise bei mindestens einigen Zehntausend. Somit hat der Sinus im zweiten Term eine Kreisfrequenz, die um einen mindestens fünfstelligen Faktor gröser ist als die im ersten; der zweite Term zeigt also erst dann eine nennenswerte Variation, wenn wir im ersten Faktor mehrere Tausend Linien betrachten. In dem Bereich, den wir realistischerweise beobachten können, ist der zweite Term somit für alle praktischen Zwecke konstant. Der Betrag dieser Konstanten ist natürlich irrelevant, denn da wir bei der FRAUNHOFER-Beugung das Beugungsbild in „sehr großer" Entfernung vom Gitter betrachten, können wir sinnvollerweise ohnehin nur von relativen, nicht aber von absoluten Helligkeiten reden.

Als letztes Beispiel zur eindimensionalen Beugung möchte ich eines betrachten, bei dem das Licht nicht als konstante Wellenfront einfällt: Je nach Wahl der Randbedingungen im optischen Resonator entsteht nicht immer ein Strahl, der näherungsweise als ebene Welle betrachtet werden kann (die sogenannte $\mathrm{TEM}_{00}$-Mode); bringt man Hindernisse in den Strahlengang, können auch höhere TEM-Moden angeregt werden (TEM = *transversal elektromagnetisch*). Bei einem dünnen Hindernis wie etwa einem Haar genau in der Mitte des Strahls beispielsweise entsteht die $\mathrm{TEM}_{01}$-Mode, die aus einem linken und einem rechten Halbstrahl besteht, deren Phasen sich um $180^\circ$ unterscheiden, und die man ansonsten wieder näherungsweise als ebene Wellen betrachten kann. Trifft ein solcher Strahl auf einen Spalt, dessen Mitte mit der Grenze zwischen den beiden Halbstrahlen zusammenfällt, müssen wir also die Funktion, die etwa links der Null gleich $+1$ und rechts der Null gleich $-1$ ist mit der Durchlässigkeitsfunktion des Spalts multiplizieren; für einen Spalt der Breite $a$ erhalten wir als Beugungsbild

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{a}{2}}^{0} e^{-iux}\,dx + \int_{0}^{\frac{a}{2}} -e^{-iux}\,dx &= \frac{1-e^{iua/2}-e^{-iua/2}+1}{-iu}\\ &= \frac{2i}{u}\left(1-\cos\frac{ua}{2}\right).\end{aligned}$$



Alternativ läßt sich dies auch über die Beziehung

$$e^{iua/2}+e^{-iua/2}-2=(e^{iua/4}-e^{-iua/4})^2=-4\sin^2\frac{ua}{4}$$

als

$$\frac{4i}{u}\sin^2\frac{ua}{4}$$

schreiben.

Schließlich möchte ich noch zumindest ein Beispiel eines zweidimensionalen Beugungsbilds betrachten. Leider sind die zugehörigen FOURIER-Integrale schon in einfachen Fällen wie dem einer scheibenförmigen Blende nicht mehr elementar auswertbar; wir beschränken uns daher auf den extrem einfachen Fall einer rechteckigen Blende. Deren Durchlässigkeitsfunktion ist

$$\alpha\colon\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ (x,y)\mapsto\begin{cases}1 & \text{falls } -\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2} \text{ und } -\frac{b}{2}\le y\le\frac{b}{2}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\end{cases},$$

die Beugungsfigur ist also gegeben durch

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}(u,v) &= \iint_{\mathbb{R}^2}\alpha(x,y)e^{-i(ux+vy)}\,dx\,dy = \iint\limits_{\substack{-\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2}\\ -\frac{b}{2}\le y\le\frac{b}{2}}} e^{-i(ux+vy)}\,dx\,dy\\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-iux}e^{-ivy}\,dx\,dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-iux}\left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-ivy}\,dy\right)dx\\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-iux}\cdot\frac{\sin\frac{bv}{2}}{v}\,dx = 4\cdot\frac{\sin\frac{au}{2}}{u}\cdot\frac{\sin\frac{bv}{2}}{v},\end{aligned}$$

da wir das Rechteck als Normalbereich betrachten können und somit das zweidimensionale Integral über zwei eindimensionale Integrationen berechnen können.

Als Beugungsfigur erhalten wir, nicht gerade überraschenderweise, das Produkt einer vertikalen und einer horizontalen Beugungsfigur eines Spalts.

## j) Der Abtastsatz von Nyquist

Egal ob es um die automatische Erfassung von Meßwerten geht oder um die Aufzeichnung von Musik: Die digitale Darstellung analoger Daten ist wesentlicher Bestandteil der Informationsverarbeitung. Nun ist aber eine beliebige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sicherlich nicht durch ihre Funktionswerte an endlich vielen Stellen oder auch an ein einer diskreten Menge von Stellen bestimmt: Auch wenn wir wissen, daß $f(t) = 0$ ist für jedes ganzzahlige Vielfache von 0,001, wissen wir noch nicht, daß $f$ die Nullfunktion ist: Auch die Funktionen $f(t) = \sin(1000\pi t)$ und $f(t) = -3\sin(5000\pi t)$ haben diese Eigenschaft. Auch bei von null verschiedenen Abtastwerten tritt dieses Problem auf: Beispielsweise stimmen auch die Funktionen

$$f(t) = \cos(500\pi t) \quad \text{und} \quad g(t) = \cos(1500\pi t)$$

für alle ganzzahligen Vielfachen von 0,001 überein, aber sie nehmen hier abwechselnd die Werte $1, 0, -1, 0$ an; siehe Abbildung zwölf. Da der Frequenzunterschied zwischen den beiden Schwingungen fast dem zwischen Baß und Sopran entspricht, ist klar, daß man die beiden Schwingungen zumindest auf einer Musik-CD nicht miteinander verwechseln darf.

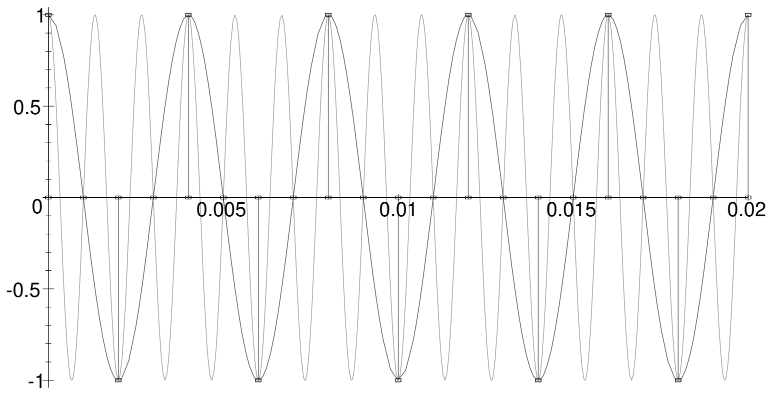



Abb. 12: Abtastung zweier Schwingungen



Die Probleme bei den obigen Beispielen beruhen offensichtlich darauf, daß es zu jedem Signal höherfrequente Signale gibt, die an vorgegebenen Punkten mit ihm übereinstimmen; man muß daher eine Grenze festlegen, oberhalb derer Frequenzen nicht mehr berücksichtigt werden sollen. Der Abtastsatz von NYQUIST sagt, wo diese Grenze liegen sollte:

**Satz:** $f \in \overline{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$ habe die Eigenschaft, daß $\widehat{f}(\omega)$ außerhalb eines Intervalls der Länge $\Omega$ verschwinde. Dann ist $f$ eindeutig bestimmt durch die Werte $f(2k\pi/\Omega)$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

*Beweis:* $(\omega_1, \omega_2)$ sei ein Intervall der Länge $\Omega$ derart, daß $\widehat{f}(\omega)$ außerhalb dieses Intervalls verschwindet. Dann ist für fast alle $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \check{\widehat{f}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\,;$$

indem wir $f$ durch die rechte Seite ersetzen (was nichts wesentliches ändert) können wir annehmen, daß dies für *alle* $t \in \mathbb{R}$ gilt. Also ist insbesondere

$$f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \widehat{f}(\omega)e^{2k\pi i\omega/\Omega}\,d\omega\,.$$

Nun betrachten wir jene Funktion $g(\omega)$, die auf dem Intervall $[\omega_1, \omega_2)$ mit $\widehat{f}(\omega)$ übereinstimmt und die periodisch mit Periode $2\pi\Omega$ in $\omega$ ist. Für diese Funktion ist dann natürlich auch

$$f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} g(\omega)e^{2k\pi i\omega/\Omega}\,d\omega\,,$$

denn im Integrationsintervall stimmen $\widehat{f}$ und $g$ überein.

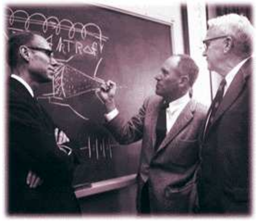
$g$ als periodische Funktion in $\omega$ mit Periode $\Omega$ hat eine Darstellung als FOURIER-*Reihe*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\lambda\omega} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\Omega}\,,$$

und der $k$-te FOURIER-Koeffizient ist

$$c_k = \frac{1}{\Omega}\int_{2\pi\omega_1}^{2\pi\omega_2} g(\omega)e^{-ik\lambda\omega}\,d\omega = \frac{1}{\Omega}\int_{2\pi\omega_1}^{2\pi\omega_2} g(\omega)e^{-i\omega k/\Omega}\,d\omega$$
$$= \frac{2\pi}{\Omega} f\left(\frac{-2k\pi}{\Omega}\right) .$$

Durch die Werte $f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right)$ sind also alle FOURIER-Koeffizienten von $g$ bestimmt, damit auch (fast überall) die Funktion $g(\omega)$, und damit auch die Funktion $\widehat{f}(\omega)$, die im Intervall $[\omega_1, \omega_2)$ mit $g(\omega)$ übereinstimmt und außerhalb (außer eventuell im Punkte $\omega_2$) verschwindet. Damit ist auch $f(t) = \check{\widehat{f}}(t)$ fast überall durch diese Werte bestimmt. ■



HARRY NYQUIST (1889–1976) wurde in Schweden geboren, arbeitete aber ab Anfang der zwanziger Jahre bei den Bell Labaratories; das Bild zeigt ihn um 1960 mit seinen dortigen Kollegen JOHN PIERCE *(links)* und RUDOLF KOMPFNER *(Mitte).* Seine Arbeit von 1924 über die Übertragungsgeschwindigkeit von Telegraphen gilt als eine der Begründungen der Informationstheorie. Den Abtastsatz, den CAUCHY bereits 1841 postuliert hatte, bewies er 1928. Weitere wichtige Arbeiten befassen sich mit der quantitativen Erforschung des thermischen Rauschens und der Stabilität von Verstärkern.

Bei praktischen Anwendungen dieses Satzes wird $f(t)$ im allgemeinen eine reelle Funktion sein; dann verschwindet

$$\widehat{f}(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(-\omega)t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)e^{-i\omega t}}\,dt$$
$$= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt} = \overline{\widehat{f}(\omega)}$$

genau dann, wenn auch $\widehat{f}(\omega)$ verschwindet. Daher sollte man in diesem Fall das Intervall, außerhalb dessen $\widehat{f}(\omega)$ verschwindet, symmetrisch wählen, also von der Form

$$(-\omega_0, \omega_0) .$$



Die Zahl $\omega_0$ wird in diesem Zusammenhang meist als *Bandbreite* bezeichnet. In diesem Fall ist $\Omega = 2\omega_0$, zur Rekonstruktion der Funktion $f$ brauchen wir also die Funktionswerte

$$f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right) = f\left(\frac{k\pi}{\omega_0}\right) \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z} .$$

Ein Signal der Bandbreite $\omega_0$ muß also mit einer Frequenz von mindestens $2\omega_0$ abgetastet werden, damit man es rekonstruieren kann.

Bekanntestes Beispiel hierfür sind Musik-CDs: Praktisch niemand kann Töne mit Frequenzen von mehr als 20kHz hören; für Aufnahmen auf CD wird 44 100 Mal pro Sekunde der Schalldruck gemessen und gespeichert, für Signale die nicht allzuweit oberhalb von 20kHz abgeschnitten werden, ist also eine perfekte Rekonstruktion möglich.

Auch in der Computergraphik spielt der Satz von NYQUIST eine wichtige Rolle, denn Pixelgraphik ist schließlich nichts anderes als die (zweidimensionale) diskrete Abtastung eines kontinuierlichen Bilds. Falls das Bild zu hochfrequente Anteile enthält, entstehen sogenannte *alias-Effekte,* da das Auge diese Anteile anhand des Pixelbilds als niedrigerfrequente Strukturen mit gleichen Abtastwerten interpretiert. Vor der Abtastung muß das Bild daher tiefpaßgefiltert werden; da die Funktion $\frac{\sin ax}{ax}$, die FOURIER-Transformierte des Rechteckimpulses, einigermaßen schnell abfällt, wendet man dazu meist das Lemma aus dem letzten Abschnitt an und faltet mit einer geeigneten solchen Funktion. Falls das Ursprungsbild auch schon als (höher aufgelöste) Pixelgraphik gegeben war, wird die Faltung hier einfach zu einer Summation über nicht garzu viele Nachbarpixel, was sehr effizient durchgeführt werden kann.

## §5: Die Laplace-Transformation

Im letzten Paragraphen haben wir gesehen, daß die FOURIER-Transformation Ableitungen in Produkte überführt; wenn wir also beide Seiten einer Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = b(t)$$

FOURIER-transformieren, erhalten wir eine algebraische Gleichung für $\widehat{y}(\omega)$, die im allgemeinen einfacher zu lösen sein sollte als die Differentialgleichung.

Der Haken an der Sache ist, daß die FOURIER-Transformierte in vielen interessanten Fällen wie etwa bei Schwingungen nicht existiert – zumindest nicht als Funktion. Deshalb arbeitet man nur selten mit dieser Methode. Eine leichte Modifikation führt aber häufig ans Ziel.

## a) Definition und erste Eigenschaften

Das FOURIER-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

hat Konvergenzprobleme sowohl an der oberen als auch an der unteren Grenze. Bei der Anwendung von Differentialgleichungen geht es meist um die Vorhersage der Zukunft, so daß das Verhalten für $t \to -\infty$ nicht interessiert; wir setzen daher die Funktion $f$ für $t < 0$ auf null.

Für positive $t$ dürfen wir nicht so radikal vorgehen; hier dämpfen wir die Funktion einfach durch eine Exponentialfunktion. Insgesamt betrachten wir also anstelle von $f(t)$ die Funktion

$$g_r(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ f(t)e^{-rt} & \text{für } t > 0 \end{cases}.$$

Den Funktionswert an der Stelle 0 legen wir so fest, daß die Funktion dort rechtsseitig stetig ist, d.h.

$$g(0) = \lim_{t\to 0+} f(t)\,,$$

wobei $t \to 0+$ bedeuten soll, daß wir nur Nullfolgen aus positiven Zahlen betrachten. Wir wollen der Einfachheit halber im folgenden annehmen, daß $f$ bereits rechtsseitg stetig ist, so daß wir an der Stelle null einfach den Wert $f(0)$ nehmen können.

Die FOURIER-Transformierte dieser Funktion $g_r$ bezeichnen wir, wenn sie existiert, als LAPLACE-Transformierte von $f$ an der Stelle $s = r + i\omega$,



d.h.

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \underset{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt\,.$$

Für gängige Funktionen $f$ ist $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ ist den meisten Formelsammlungen zu finden; es gibt auch umfangreiche Tabellenwerke, die ausschließlich der LAPLACE-Transformation gewidmet sind. Im allgemeinen wird sie nur für hinreichend große Werte von $r = \mathfrak{Re}\, s$ existieren.

Die Umkehrung der LAPLACE-Transformation folgt aus der inversen FOURIER-Transformation: Da fast überall $\mathcal{L}\{f(t)\}(r + i\omega) = \widehat{g}_r(t)$ ist, ist $g_r(t)$ die inverse FOURIER-Transformierte von $\mathcal{L}\{f(t)\}(r + i\omega)$; für $t > 0$ ist also fast überall

$$f(t) = e^{rt} g_r(t) = \frac{e^{rt}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\{f(t)\}(r + i\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\,.$$

Da die Funktionswerte von $f$ auf der negativen Achse bei der LAPLACE-Transformation ignoriert werden, lassen sie sich natürlich auch nicht aus der LAPLACE-Transformierten rekonstruieren.

Wir betrachten die LAPLACE-Transformation in diesem Paragraphen, da sie wie die FOURIER-Transformation die Differentiation in Multiplikation überführt: Nach der Regel über partielle Integration ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\dot f(t)\}(s) &= \int_0^{\infty} \dot f(t)e^{-st}\,dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt \\ &= -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}(s)\end{aligned}$$

und damit induktiv

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2}\dot f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)\,.$$

Dies ist etwas komplizierter als bei der FOURIER-Transformation, wo wir keine Funktionswerte an der Stelle null berücksichtigen mußten, aber für die Anwendung auf Differentialgleichungen ist das meist ein *Vorteil:*

In der Praxis hat man es fast immer mit Anfangswertproblemen zu tun, wobei man den Anfangszeitpunkt ohne großen Aufwand als Nullpunkt wählen kann. Dann geht es also um die Bestimmung einer Funktion $y(t)$ mit den Eigenschaften, daß

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = b(t)$$

ist und

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{n-1}(0) = y_{n-1}\,.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation macht daraus die algebraische Gleichung

$$\begin{aligned} & s^n\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - s^{n-1}y_0 - s^{n-2}y_1 - \cdots - y_{(n-1)} \\ +\, & a_{n-1}s^{n-1}\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - s^{n-2}y_0 - s^{n-3}y_1 - \cdots - y_{(n-2)} \\ & \vdots \\ +\, & a_1 s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - y_0 \\ +\, & a_0\mathcal{L}\{y(t)\}(s) \qquad = \qquad \mathcal{L}\{b(t)\}(s) \end{aligned}$$

für $\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, die man – so die rechte Seite existiert – leicht nach $\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ auflösen kann. Rücktransformation (meist anhand einer Tabelle) führt dann auf die Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems. Bevor wir dazu Beispiele betrachten, sollten wir zunächst die LAPLACE-Transformierten einiger wichtiger Funktionen kennen.

### b) Rechenregeln und Beispiele zur Laplace-Transformation

Die FOURIER-Transformation existiert (als Funktion) weder für reine Schwingungen noch für Polynome, und selbst für $e^{-t}$ gibt es Probleme amunteren Rand des Integrationsbereichts. Wir wollen uns überlegen, daß für alle diese Funktionenklassen die LAPLACE-Transformierte existiert.

Beginnen wir mit $\mathcal{L}\{\sin t\}(s)$. Dieses Integral läßt sich durch partielle Integration relativ leicht ausrechnen, noch einfacher geht es aber, wenn wir die Rechenregeln für die LAPLACE-Transformation der Ableitung anwenden: Da der Cosinus Ableitung des Sinus ist, haben wir einerseits

$$\mathcal{L}\{\cos t\}(s) = s \cdot \mathcal{L}\{\sin t\}(s) - \sin 0 = s \cdot \mathcal{L}\{\sin t\}(s)\,,$$



andererseit ist der Sinus die negative Ableitung des Cosinus und deshalb

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = -\big(s \cdot \mathcal{L}\{\cos t\}(s) - \cos 0\big) = 1 - s \cdot \mathcal{L}\{\cos t\}(s)\,.$$

Also ist

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = 1 - s^2 \cdot \mathcal{L}\{\sin t\}(s) \quad \text{oder} \quad (1+s^2)\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = 1$$

und damit

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{1+s^2}\,.$$

Die LAPLACE-Transformierte

$$\mathcal{L}\{\cos t\}(s) = s \cdot \mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{s}{1+s^2}$$

des Cosinus wird bei dieser Vorgehensweise gleich mitgeliefert.

Genauso können wir $\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s)$ ausrechnen: Hier ist

$$\omega\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = s \cdot \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s)$$

und

$$\omega\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = 1 - s \cdot \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s)\,,$$

also

$$\omega\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = 1 - \frac{s^2}{\omega}\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s)$$

oder

$$\left(\omega + \frac{s^2}{\omega}\right)\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = 1\,,$$

d.h.

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{1}{\omega + \frac{s^2}{\omega}} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

und

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{\omega}\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}\,.$$

Für die reine Schwingung $f(t) = a\cos \omega t + b\sin \omega t$ ist also

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = a\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) + b\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{as+b\omega}{s^2+\omega^2}\,.$$

Auch gedämpfte Schwingungen sind kein Problem, denn für jede Funktion $f$ ist

$$\mathcal{L}\{f(t)e^{-\lambda t}\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-\lambda t}e^{-st}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+\lambda)t}\,dt$$
$$= \mathcal{L}\{f(t)\}(s+\lambda)\,,$$

also

$$\mathcal{L}\{e^{-\lambda t}\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{(s+\lambda)^2+\omega^2}$$

und

$$\mathcal{L}\{e^{-\lambda t}\cos\omega t\}(s) = \frac{s+\lambda}{(s+\lambda)^2+\omega^2}\,.$$

Betrachten wir als nächstes Polynome: Für eine reine Potenz ist

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \int_0^\infty t^n e^{-st}\,dt\,.$$

Dieses Integral können wir durch die sogenannte *Gammafunktion*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

ausdrücken: mit der Substitution $u = st$ wird

$$\int_0^\infty t^n e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \frac{u^n}{s^n}e^{-u}\,\frac{du}{s} = \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty u^n e^{-u}\,du = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}\,.$$

Dies können wir noch weiter ausrechnen, denn offensichtlich ist

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1\,,$$

und partielle Integration zeigt, daß für $x > 0$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt = -t^x e^{-t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty x t^{x-1}e^{-t}\,dt = x\Gamma(x)$$



ist. Somit folgt für natürliche Zahlen $n$ induktiv

$$\Gamma(n+1) = n!\,,$$

und

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}\,.$$

Für ein Polynom

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

ist damit

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{n!a_n}{s^{n+1}} + \frac{(n-1)!a_{n-1}}{s^n} + \cdots + \frac{2a_1}{s^2} + \frac{a_0}{s}$$
$$= \frac{n!a_n + (n-1)!a_{n-1}s + \cdots + 2a_1 s^{n-1} + a_0 s^n}{s^{n+1}}\,.$$

Insbesondere ist die LAPLACE-Transformierte einer konstanten Funktion $f(t) = a$ gleich $a/s$. Genau dieselbe Transformierte hat natürlich auch die Sprungfunktion

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{für } t \ge 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases},$$

denn auf Werte an negativen Stellen kommt es bei der LAPLACE-Transformation nicht an.