Wir interessieren uns vor allem für kleine Werte von δ; deshalb betrachten wir im folgenden nur noch Werte $\delta \le \frac{1}{2}$. Dann ist $1-\delta \ge \frac{1}{2}$ und

$$f(t) - f_r(t) \le r\left(\frac{2}{\delta} - \frac{4}{(b-a)^2}\right) .$$

Damit können wir die L^2-Norm der Differenz abschätzen:

$$\begin{aligned}
\|f-f_r\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)-f_r(t)|^2\,dt \\
&= \int_a^{a+\delta} |f(t)-f_r(t)|^2\,dt + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(t)-f_r(t)|^2\,dt \\
&\quad + \int_{b-\delta}^{b} |f(t)-f_r(t)|^2\,dt \\
&\le \delta + r^2(b-a)\left(\frac{2}{\delta} - \frac{4}{(b-a)^2}\right)^2 + \delta .
\end{aligned}$$

Setzen wir hier speziell $\delta = \sqrt{r}$, was wir für hinreichend kleine r dürfen, so wird dies zu

$$\begin{aligned}
&\sqrt{r} + r^2\left(\frac{2}{\sqrt{r}} - \frac{4}{(b-a)^2}\right)^2 + \sqrt{r} \\
&= 2\sqrt{r} + r(b-a)\left(2 - \frac{4\sqrt{r}}{(b-a)^2}\right)^2 ,
\end{aligned}$$

und dieser Ausdruck geht gegen null für $r \to 0$. Also konvergieren die f_r für $r \to \infty$ in der L^2-Norm gegen f und $f \in \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$.

Zumindest der Rechteckimpuls f liegt also in $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$. Damit liegen dort aber auch noch eine ganze Reihe anderer Funktionen, beispielsweise alle, die außerhalb eines Intervalls $[a,b]$ verschwinden und für die über diesem Intervall

$$\|h\|_2^2 = \int_a^b h(t)\overline{h(t)}\,dt$$

existiert. Eine solche Funktion h kann nämlich fortgesetzt werden zu einer periodischen Funktion p mit Periode $b-a$, die über $[a,b]$ mit h übereinstimmt. Diese periodische Funktion hat eine FOURIER-Reihe, deren Teilsummen wir mit

$$s_k(t) = \sum_{j=-k}^{k} \widehat{p}(k)\, e^{ij\omega t}$$

bezeichnen, wobei $T = b-a$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ist. Nach Abschnitt *c)* konvergiert die Folge der s_k in der L^2-Norm $\|\cdot\|_{2,T}$ von $\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ gegen p. Da man zur Berechnung der L^2-Norm einer periodischen Funktion über jedes beliebige Periodenintervall integrieren kann, können wir insbesondere über das Intervall $[a,\,b]$ integrieren; da der Rechteckimpuls f genau in diesem Intervall gleich eins ist und sonst überall verschwindet und außerdem gleich seinem Quadrat ist, gilt für jede Funktion $h \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}
\|h\|_{2,T} &= \frac{1}{T}\sqrt{\int_a^b h(t)\overline{h(t)}\,dt} = \frac{1}{T}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)h(t)\cdot\overline{f(t)h(t)}\,dt} \\
&= \frac{1}{T}\|f\cdot h\|_2 .
\end{aligned}$$

Die Funktionen s_k sind als Linearkombinationen von Exponentialfunktionen beliebig oft stetig differenzierbar; daher sind auch ihre Produkte mit den oben konstruierten Funktionen f_k beliebig oft stetig differenzierbar. Diese Produkte sind daher stark abfallend, denn f_k ist stark abfallend und s_k ist beschränkt. Da die Folge der s_k gegen p konvergiert und die der f_k gegen den Rechteckimpuls f, erwarten wir, daß die Folge der Produkte gegen $pf = h$ konvergiert, und in der Tat ist

$$\begin{aligned}
\|h - f_k s_k\|_2 &= \|pf - f_k s_k\|_2 = \|(p-s_k)f + (f-f_k)s_k\|_2 \\
&\le T\cdot\|p-s_k\|_{2,T}\,\|f\|_2 + \|f-f_k\|_2\cdot T\cdot\|s_k\|_{2,T} \\
&\le T^2\cdot\|p-s_k\|_{2,T} + \|f-f_k\|_2\cdot T\cdot\|p\|_{2,T} ,
\end{aligned}$$

was für $k \to \infty$ gegen null geht.

Damit ist also jede quadratintegrierbare Funktion auf einem beschränkten Intervall FOURIER-transformierbar, und beachtet man noch, daß die Summe zweier Funktionen aus $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ wieder in $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ liegt, gilt dasselbe beispielsweise für jede Funktion, die außerhalb eines gewissen Intervalls $[a, b]$ stark abfallend ist und innerhalb quadratintegrierbar; dies dürfte für fast alle praktischen Zwecke, in denen man FOURIER-Transformationen betrachten möchte, ausreichen.

f) Distributionen

Eine Ausnahme bilden vielleicht noch die reinen Schwingungen wie $f(t) = e^{\omega_0 it}$ oder $g(t) = \cos\omega_0 t$. Hier hätte man gerne eine Funktion $\widehat{f}(\omega)$, die genau an der Stelle ω_0 von null verschieden ist, beziehungsweise eine Funktion $\widehat{g}(\omega)$, die genau an den Stellen $\pm\omega_0$ nicht verschwindet. Eine solche Funktion taugt aber nicht als FOURIER-Transformierte, denn ihre inverse Transformierte wäre nicht $f(t)$ oder $g(t)$, sondern die Nullfunktion.

Zumindest näherungsweise läßt sich allerdings eine Funktion finden, die außerhalb eines gegebenen Punktes $t_0 \in \mathbb{R}$ verschwindet: Mit

$$h_a\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{falls } t - \frac{a}{2} \le t \le t + \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

ist für kleine Werte von a und eine integrierbare Funktion f mit Stammfunktion F

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_a(t) f(t)\,dt = \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(t)\,dt = \frac{F\left(\frac{a}{2}\right) - F\left(-\frac{a}{2}\right)}{a}\,.$$

Im Limes ist also

$$\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} h_a(t) f(t)\,dt = F'(0) = f(0)\,.$$

Falls wir hier Limesbildung und Integration vertauschen könnten, wäre somit

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) f(t)\,dt \quad \text{mit} \quad h(t) = \lim_{a\to 0} h_a(t)\,.$$

Dieser rechtstehende Grenzwert definiert aber leider keine sinnvolle Funktion, denn

$$\lim_{a\to 0} h_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \infty & \text{für } t = 0 \end{cases}.$$

Selbst wenn wir Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \cap \{-\infty, \infty\}$ zulassen, können wir damit nichts anfangen, denn beispielsweise wäre dann $2 \cdot h$ dieselbe Funktion wie h, da $2 \cdot 0 = 0$ und $2 \cdot \infty = \infty$ ist; andererseits wäre aber natürlich

$$\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} 2h_a(t) \cdot f(t)\,dt = 2f(0)\,,$$

obwohl für jedes $t \in \mathbb{R}$ auch gilt

$$\lim_{a\to 0} 2 \cdot h_a(t) = h(t)\,.$$

Die Funktion h, so wie sie oben definiert wurde, hat also keine Eigenschaften, die einen vernünftigen Umgang damit ermöglichen würden.

Andererseits interessieren uns die Funktionswerte von h im Rahmen der FOURIER-Theorie zumindest nicht unmittelbar; was wirklich interessiert, sind nur Integrale wie

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t}\,dt\,,$$

und denen können wir eine sinnvolle Bedeutung geben.

Dazu definieren wir zunächst für jede Funktion $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Abbildung

$$T_f\colon \begin{cases} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ g \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t)\,dt \end{cases}.$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn für $g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ liegt auch die Funktion $\overline{g}$, die jedem $t \in \mathbb{R}$ den konjugiert komplexen Wert $\overline{g(t)}$ zuordnet, in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, und

$$T_f(g) = (f, \overline{g})$$

ist ein HERMITEsches Produkt.

Für stetige Funktionen (und damit erst recht für alle Funktionen aus dem SCHWARZ-Raum) ist f durch T_f eindeutig bestimmt, denn wenn die Abbildungen T_f und T_h übereinstimmen, ist insbesondere $T_f(\overline{f-h}) = T_h(\overline{f-h})$, also

$$(f, \overline{\overline{f-h}}) = (h, \overline{\overline{f-h}}) \quad \text{oder} \quad (f, f-h) = (h, f-h)\,.$$

Damit ist aber $(f-h, f-h) = 0$, was für stetige Funktionen bedeutet, daß $f-h$ identisch verschwinden muß, d.h. $f = h$.

Allgemein definieren wir

Definition: *a)* Eine *Distribution* ist eine lineare Abbildung

$$L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}\,.$$

b) Die zu einer Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gehörige Distribution ist die oben definierte Distribution T_f.

Offensichtlich ist die Menge aller dieser Distributionen ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, und über die lineare Abbildung $f \mapsto T_f$ kann $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit einem Untervektorraum davon identifiziert werden.

Die obige *ad hoc* Definition ist deutlich einfacher als die in der Mathematik übliche Definition, und in der Tat kann man über eine allgemeine Distribution in diesem Sinne so gut wie nichts vernünftiges beweisen. Für die Zwecke dieser Vorlesung und die Anwendungen in der Elektrotechnik I reicht es jedoch aus, einige wenige konkrete Distributionen zu betrachten, und als Rahmen dafür genügt die obige Definition.

Auch im nächsten Schritt möchte ich etwas schlampen und einfach sagen, daß nach der Rechnung zu Beginn dieses Abschnitts die Folge

der Distributionen T_{h_a} zu den dort betrachteten Funktionen h_a gegen die Distribution

$$T_\delta \colon \begin{cases} L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ \qquad g \mapsto g(0) \end{cases}$$

konvergiert. Anschaulich ist das ziemlich klar, zu einer mathematischen Aussage würde es allerdings erst, wenn ich eine Metrik angäbe, bezüglich derer die Konvergenz definiert sein soll.

Definition: T_δ heißt DIRACsche δ-Distribution.

PAUL ADRIEN MAURICE DIRAC (1902–1984) wuchs auf in England als Sohn eines Schweizer Vaters und einer englischen Mutter. Trotz großem Interesse an der Mathematik studierte er von 1918–1921 Elektrotechnik an der Universität Bristol, da er auf keinen Fall Lehrer werden wollte. 1921 erhielt er ein Stipendium der Universität Cambridge; da dieses aber nicht zum Leben gereicht hätte, blieb er in Bristol, wo ihn die Universität von Studiengebühren befreite und seinen Wechsel in die Mathematik erlaubte. Ab 1923 arbeitete er in Cambridge an seiner Dissertation über Quantenmechanik, die er 1926 abschloß. 1930 folgte ein Buch über Quantenmechanik, für das er 1933 mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet wurde. 1932 bekam er einen Lehrstuhl für Mathematik an der Unviersität Cambridge; nach seiner Emeritierung lebte er in Florida, wo er 1971 Physikprofessor an der Florida State University wurde. Zentrales Thema seiner Arbeiten war die Anwendung mathematischer Methoden auf die Quantenmechanik und die Relativitätstheorie sowie auch Ansätze zur (bis heute nicht befriedigend gelösten) Vereinheitlichung dieser beiden Theorien.

Da es umständlich wäre, immer die Abbildungen T_δ hinzuschreiben, schreibt man oft in Analogie zu der Schreibweise

$$T_f(g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\,dt$$

für Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ auch

$$T_\delta(g) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)g(t)\,dt$$

und entsprechend auch für andere Distributionen; man muß sich dabei aber bewußt sein, daß δ, wie wir uns gerade überlegt haben, nicht sinnvoll als Funktion definiert werden kann: Die rechte Seite hat nur *als ganzes* eine sinnvolle Bedeutung. Trotzdem hat sich die Schreibweise gerade in der technischen Literatur eingebürgert und soll daher auch hier verwendet werden.

Indem wir übliche Rechenregeln für Integrale auch auf das Integral zur Delta-Distribution anwenden, folgt beispielsweise, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)g(u+t_0)\,du = g(t_0)$$

ist; wir interpretieren dies so, daß $\delta(t-t_0)$ zur Distribution

$$\begin{cases} \mathrm{L}^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ \qquad g \mapsto g(t_0) \end{cases}$$

gehören soll.

In diesem Sinne ist dann beispielsweise

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1)e^{i\omega t}\,dt = e^{i\omega}$$

und damit

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \pi\big(\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)\big)e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \cos t\,.$$

Für eine Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist

$$f(t) = \check{\hat{f}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\,d\omega\,;$$

in Analogie dazu sagen wir, $\pi\big(\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)\big)$ sei die FOURIER-Transformierte von $\cos t$ – auch wenn das Integral

$$\widehat{\cos}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos t \cdot e^{-i\omega t}\,dt$$

natürlich nicht existiert.

Allgemein sagen wir, die FOURIER-Transformierte einer Funktion f existiere *als Distribution,* wenn es eine Distribution η gibt, so daß

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \eta(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

ist.

Da δ durch Funktionen aus $\overline{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$ und damit auch durch solche aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ approximiert werden kann, gelten die üblichen Rechenregeln, die wir für Funktionen aus $\overline{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$ hergeleitet haben, auch für δ sowie für andere Distributionen, die sich als Grenzwert einer Folge von Funktionen aus $\overline{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$ auffassen lassen.

g) Faltungen

Wir haben schon eine ganze Reihe von Eigenschaften der FOURIER-Transformation teils explizit, teils im Vorbeigehen, bewiesen; so haben wir bereits mehrfach ihre *Linearität* benutzt, d.h.

$$\textit{Für } h(t) = \lambda f(t) + \mu g(t) \ \textit{ ist } \ \hat{h}(\omega) = \lambda\hat{f}(\omega) + \mu\hat{g}(\omega)\,.$$

Das Verhalten unter *Streckungen* haben wir im Beweis der Umkehrformel hergeleitet:

$$\textit{Für } g(t) = f(at) \ \textit{ ist } \ \hat{g}(\omega) = \frac{1}{a}\hat{g}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Auch das Verhalten unter *Verschiebungen* läßt sich leicht ausrechnen: Für $g(t) = f(t+a)$ ist

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+a)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega(s-a)}\,ds$$

$$= e^{i\omega a}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega s}\,ds = e^{i\omega a}\hat{f}(\omega)\,.$$

Auch Ableitungen im Zeit- und Frequenzbereich kennen wir:

$$\widehat{f^{(n)}}(\omega) = (i\omega)^n\hat{f}(\omega) \quad \text{und} \quad \widehat{t^n f}(\omega) = i^n\hat{f}^{(n)}(\omega)\,.$$

Was uns noch fehlt, ist das Verhalten unter *Faltungen,* die wir hier in völliger Analogie zum periodischen Fall aus §3*a)* definieren:

Definition: Für zwei Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt

$$f \star g \colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)\,ds \end{cases}$$

Faltung von f mit g.

Ebenfalls in völliger Analogie zum periodischen Fall gilt

Lemma: Für $h(t) = (f \star g)(t)$ ist $\widehat{h}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega)$.

Beweis: Nach dem Satz von FUBINI ist

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(\omega) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\,g(s)\,ds \right) e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\,g(s)e^{-i\omega t}\,dt \right) ds \\
&\underset{u=t-s}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\,g(s)e^{-i\omega(u+s)}\,du \right) ds \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}\,du \right) g(s)e^{-i\omega s}\,ds \\
&= \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}\,du \right) \cdot \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{-i\omega s}\,ds \right) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega)\,,
\end{aligned}$$

wie behauptet. ■

Als erste Anwendung hiervon können wir die FOURIER-Transformierte eines Produkts durch die FOURIER-Transformierten der Faktoren ausdrücken:

Korollar: $\widehat{fg}(\omega) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f} \star \widehat{g})(\omega)$.

Beweis: Wir wenden das gerade bewiesenen Lemma an auf die FOURIER-Transformierten von f und g; dann ist

$$\widehat{\widehat{f} \star \widehat{g}}(t) = \widehat{\widehat{f}}(t) \cdot \widehat{\widehat{g}}(t)\,.$$

Wie wir wissen, unterscheiden sich FOURIER-Transformation und inverse FOURIER-Transformation durch den Faktor $1/2\pi$ vor der inversen Transformation und das Vorzeichen des Argument, d.h.

$$\widehat{\widehat{f}}(t) = 2\pi \cdot f(-t), \quad \widehat{\widehat{g}}(t) = 2\pi \cdot g(-t) \quad \text{und} \quad \widehat{\widehat{f} \star \widehat{g}}(t) = 4\pi^2 \cdot f(-t)g(-t)\,.$$

Aus dem gleichen Grund ist $\widehat{\widehat{\widehat{f} \star \widehat{g}}}(t) = 2\pi \cdot (\widehat{f} \star \widehat{g})(-t)$, also

$$2\pi \cdot (\widehat{f} \star \widehat{g})(-t) = 4\pi^2 \cdot \widehat{fg}(-t) \quad \text{oder} \quad (fg)(-t) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f} \star \widehat{g})(-t)\,.$$

Dies gilt für alle reellen Zahlen t, deshalb können wir das Minuszeichen links und rechts auch weglassen und haben dann die Behauptung des Korollars. ■

Eine weitere interessante Konsequenz dieses Lemmas ist, daß sich Faltungen gelegentlich rückgängig machen lassen: $f \star g$ ist durch seine FOURIER-Transformation $\widehat{f} \cdot \widehat{g}$ (fast überall) bestimmt; falls $g(\omega)$ keine Nullstellen hat, kann man die Multiplikation mit $g(\omega)$ durch eine Division rückgängig machen. Eine Grundidee zum Rückgängigmachen der Faltung wäre also die folgende: Ist $h(t)$ die inverse FOURIER-Transformation von $1/\widehat{g}(\omega)$, so hat $(f \star g) \star h$ FOURIER-Transformierte

$$\widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega) \cdot \widehat{h}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega) \cdot \frac{1}{\widehat{g}(\omega} = \widehat{f}(\omega)\,,$$

$(f \star g) \star h$ stimmt also fast überall mit f überein.

Leider ist die Sache aber doch nicht ganz so einfach, denn die Existenz von h ist alles andere als klar: Für eine stark abfallende Funktion $g(\omega)$

ist $1/g(\omega)$ „stark ansteigend“. Das muß aber nicht immer ein Problem sein, denn für praktische Zwecke wird man sowohl den Frequenzbereich, über den integriert wird, als auch den Zeit- oder Ortsbereich oft abschneiden können, so daß nur ein Integral über ein endliches Intervall betrachtet werden muß. Die Formel, die wir gerade benutzt haben, gelten nach dieser Einschränkung des Integrationsintervalls natürlich nicht mehr, zumindest nicht mehr exakt, aber ausgehend von den obigen Formeln kann man mit einigem Geschick doch gelegentlich Formeln finden, die zumindest näherungsweise ein brauchbares Ergebnis liefern. So konnte beispielsweise die NASA die Bilder des falsch fokusierten HUBBLE-Teleskops durch digitale Nachbehandlung so deutlich verbessern, daß die Bildqualität kaum schlechter ist, als sie es bei einem korrekt fokusierten Teleskop gewesen wäre.

Besonders einfach sind Faltungen mit δ-Funktionen zu berechnen: Für $\eta(t) = \delta(t - t_0)$ zeigt die Substitutionsregel mit $u = t - t_0 - s$, daß

$$\eta \star f = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0 - s) g(s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) g(t - t_0 - u)\, du = g(t - t_0)$$

ist, Faltung mit $\delta(t - t_0)$ verschiebt also einfach das Argument um t_0. Insbesondere ist

$$\delta \star f = f \quad \text{für alle } f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})\,.$$

h) Mehrdimensionale Faltungen und Fourier-Integrale

In völliger Analogie zum eindimensionalen Faltungsintegral läßt sich auch ein n-dimensionales definieren: Für zwei Funktionen

$$f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}\,,$$

für die die uneigentlichen Integrale

$$\int \underset{\mathbb{R}^n}{\cdots} \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \ldots dx_n \quad \text{und} \quad \int \underset{\mathbb{R}^n}{\cdots} \int g(\boldsymbol{x})\, dx_1 \ldots dx_n$$

existieren, definieren wie die Faltung als

$$f \star g = \int \underset{\mathbb{R}^n}{\cdots} \int f(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n) g(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n\,.$$

Auch die anschauliche Interpretation ist dieselbe wie im eindimensionalen Fall: Wenn wir f als eine Gewichtsfunktion auffassen, ist $f \star g$ ein gewichtetes Mittel über Werte von g; für

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\pi^{n/2}\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^n x_i^2}$$

etwa, die n-dimensionale GAUSS-Funktion, entspricht das einer je nach Größe von σ mehr oder weniger starken Defokusierung.

Durch mehrdimensionale Faltungen mit δ-Distributionen lassen sich Verschiebungungen realisieren: Beispielsweise ist

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \delta(x - a)\delta(y - b) f(x, y)\, dx\, dy = f(x - a, y - b)\,.$$

Ist beispielsweise $f \cdot \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die (z.B. durch Grauwerte) ein Bild definiert und die außerhalb des Bereichs

$$0 \le x, y \le 1$$

verschwindet, so ist mit der Distribution

$$\eta(x, y) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{M} \delta(x - k)\delta(y - \ell)$$

die Faltung $\eta \star f$ ein Bilderbogen aus NM Exemplaren dieses Bildes.

Auch die FOURIER-Transformation läßt sich in völliger Analogie zum eindimensionale Fall auf beliebige Dimensionen verallgemeinern: Für $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definieren wir

$$\widehat{f}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \\ (\omega_1, \ldots, \omega_n) \mapsto \int \underset{\mathbb{R}^n}{\cdots} \int f(x_1, \ldots, x_n) e^{-i\sum_{k=1}^n \omega_i x_i}\, dx_1 \cdots dx_n \end{cases}.$$

Da es nur eine Zeit gibt, läßt sich dies nicht als Zerlegung eines zeitlichen Signals in seine Frequenzen interpretieren; die x_i sollte man sich hier als *räumliche* Koordinaten vorstellen. Beispiele dazu folgen im nächsten Abschnitt, wo wir eine Anwendung solcher räumlicher FOURIER-Transformationen betrachten.