macht $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ zu einem HERMITEschen Vektorraum.

Beweis: a) Da sowohl $f(t)$ als auch $t^2 f(t)$ beschränkt sind, ist auch $(1+t^2)f(t)$ beschränkt, es gibt also eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so daß

$$|f(t)| \le \frac{C}{1+t^2} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}\,.$$

Da das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{a,b\to\infty} \int_{-a}^{b} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{a,b\to\infty} \big(\arctan b - \arctan(-a)\big)$$
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

konvergiert, ist es eine konvergente Majorante des Integrals über f, so daß nach dem Majorantenkriterium auch das letztere konvergiert. Damit ist auch *b)* bewiesen, d.h. die Konvergenz aller Integrale $\widehat{f}(\omega)$ und $\check{g}(t)$, denn da $e^{\pm i\omega t}$ den Betrag eins hat, ist auch für jedes $\omega \in \mathbb{R}$ *bzw.* $t \in \mathbb{R}$

$$|f(t)| = \left|f(t)\cdot e^{-i\omega t}\right| \le \frac{C}{1+t^2}$$

bzw.

$$|g(\omega)| = \left|g(\omega)\cdot e^{i\omega t}\right| \le \frac{C}{1+\omega^2}\,.$$

Genauso läßt sich auch das Integral über $f(t)\overline{f(t)}$ abschätzen, denn da $|tf(t)|$ beschränkt ist, ist auch $\left|t^2 f(t)\overline{f(t)}\right|$ und damit $(1+t^2)f(t)\overline{f(t)}$ beschränkt. (Betragsstriche sind hier natürlich überflüssig.)

b) Wie wir gerade gesehen haben, konvergiert das rechtsstehende Integral im Spezialfall $f = g$. Für beliebiges $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und beliebige reelle Zahlen $a \le b$ gilt nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung in der etwas allgemeineren Form aus §1*d)*

$$\left|\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt\right| \le \sqrt{\left|\int_a^b f(t)\overline{f(t)}\,dt\right|}\cdot\sqrt{\left|\int_a^b g(t)\overline{g(t)}\,dt\right|}\,,$$

und somit konvergiert mit der rechten Seite auch die linke für $a \to -\infty$ und $b \to \infty$.

Die Eigenschaften eines HERMITEschen Skalarprodukts sind klar bis auf die Eigenschaft, daß nur die Nullfunktion Skalarprodukt null mit sich selbst haben darf, aber da wir es hier mit beliebig oft stetig differenzierbaren und damit insbesondere stetigen Funktionen zu tun haben, folgt dies genauso wie in **[HM1]**, *Kap. 2,* §1*a)* für das Skalarprodukt auf dem Vektorraum aller stetiger Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$. ∎

b) Der Satz von Fubini

Wenn wir die FOURIER-Transformation auch wieder rückgängig machen wollen, wissen wir nur dann, daß $\check{\widehat{f}}$ existiert, wenn $\widehat{f}$ wieder stark abfallend ist. Das ist für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ glücklicherweise immer der Fall; bevor wir das zeigen können, brauchen wir aber erst einige andere Eigenschaften der FOURIER-Transformation, die uns auch später noch in anderem Zusammenhang nützlich sein werden. Für diese wiederum benötigen wir einige einfache Aussagen über die Vertauschung von Grenzprozessen.

Lemma: *a)* Die Funktion $h\colon [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist auch

$$H\colon \begin{cases} [a,b] \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto \displaystyle\int_c^d h(\omega,t)\,dt \end{cases}$$

stetig.
b) Ist h zusätzlich r-mal stetig partiell nach der ersten Variablen ω differenzierbar, so ist

$$\frac{d^r H}{d\omega^r}(\omega) = \int_c^d \frac{\partial^r h}{\partial\omega^r}(\omega,t)\,dt\,.$$

Beweis: a) Da $[a,b]$ und $[c,d]$ abgeschlossene Intervalle sind, ist h nicht nur stetig, sondern sogar gleichmäßig stetig. Es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jedes $t \in [c,d]$ gilt

$$|h(\omega_1,t) - h(\omega_2,t)| < \varepsilon \quad \text{falls} \quad |\omega_1 - \omega_2| < \delta\,.$$

Für solche ω_1 und ω_2 ist dann

$$|H(\omega_1) - H(\omega_2)| \le \int_c^d |h(\omega_1, t) - h(\omega_2, t)|\; dt < \varepsilon(d-c)\,.$$

Da $d-c$ eine Konstante ist, läßt sich dies durch Wahl von $\varepsilon = \eta/(d-c)$ unter jedes vorgegebene $\eta > 0$ drücken.

b) Für $\Delta \neq 0$ ist

$$\frac{H(\omega+\Delta) - H(\omega)}{\Delta} = \int_c^d \frac{h(\omega+\Delta, t) - h(\omega, t)}{\Delta}\, dt\,,$$

und der rechtsstehende Integrand ist nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gleich $\frac{\partial h}{\partial \omega}(\xi, t)$ für ein ξ zwischen ω und $\omega + \Delta$. Für $\Delta \to 0$ geht dies gegen $\frac{\partial h}{\partial \omega}(\omega, t)$, und da die partielle Ableitung als stetig vorausgesetzt wurde, gilt wegen *a),* daß

$$H'(\omega) = \lim_{\xi\to\omega} \int_c^d \frac{\partial h}{\partial \omega}(\xi, t)\, dt = \int_c^d \frac{\partial h}{\partial \omega}(\omega, t)\, dt$$

ist, wie behauptet. Für $r > 1$ folgt die Behauptung induktiv. ■

Als erste Anwendung folgt ein Satz über die Vertauschung der Integrationsreihenfolge, der für die Inversion der FOURIER-Transformation fundamental sein wird:

Satz von Fubini: Für eine stetige Funktion $h\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ ist

$$\int_a^b \left(\int_c^d h(\omega, t)\, dt \right) d\omega = \int_c^d \left(\int_a^b h(\omega, t)\, d\omega \right) dt\,.$$

Beweis: Das folgt entweder aus der zweidimensionalen Integrationstheorie in **[HM1]**, Kap. II, §6*b),* da beide Seiten das Integral

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} h(\omega, t)\, d\omega\, dt$$

berechnen, wobei das Rechteck $[a,b] \times [c,d]$ als Normalbereich einmal vom Typ I und einmal vom Typ II aufgefaßt wird. Es folgt aber auch leicht aus dem gerade bewiesenen Lemma:

Für $a \le \omega \le b$ sei

$$H(\omega) = \int_c^d \left(\int_a^\omega h(\xi, t)\, d\xi \right) dt\,.$$

Nach der zweiten Aussage des gerade bewiesenen Lemmas ist dann

$$H'(\omega) = \int_c^d h(\omega, t)\, dt\,,$$

also ist die linke Seite der zu beweisenden Gleichung

$$\int_a^b \left(\int_c^d h(\omega, t)\, dt \right) d\omega = \int_a^b H'(\omega)\, d\omega = H(b) - H(a) = H(b)\,,$$

und das ist nach Konstruktion gleich der rechten Seite. ■

Der italienische Mathematiker GUIDO FUBINI (1879–1943) arbeitete zunächst auf dem Gebiet der Differentialgeometrie, interessierte sich dann aber immer mehr für analytische Themen wie Differentialgleichungen und Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher. 1901 wurde er Professor in Catania auf Sizilien, später in Genua und ab 1908 in Turin, wo er blieb, bis er 1939 trotz seiner angegriffenen Gesundheit wegen des italienischen Faschismus nach USA emigrierte und ans Institute for Advanced Study in Princeton wechselte. Der hier zitierte Satz ist zwar sein bekanntestes, aber ganz sicher nicht sein bedeutendstes Ergebnis.

Wir interessieren uns im Augenblick nicht für Integrale über endliche Intervalle, sondern für Intergrale über die gesamte reelle Gerade; bevor wir den gerade bewiesenen Satz auf FOURIER-Integrale anwenden können, müssen wir also noch den Grenzübergang $a, c \to -\infty$ und $b, d \to +\infty$ durchführen. Nach dem WEIERSTRASSschen Konvergenzkriterium gibt es hier keine Probleme, *falls* die betroffenen Integrale absolut konvergent sind. Die für uns interessante Version des Satzes von FUBINI ist also

Satz: Die stetige Funktion $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei so, daß die uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(\omega, t)| \, dt \right) d\omega \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(\omega, t)| \, d\omega \right) dt$$

beide konvergieren. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega, t) \, dt \right) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega, t) \, d\omega \right) dt .$$

■

c) Fourier-Integrale und Ableitungen

Die Aussagen des vorigen Abschnitts führen geradewegs auf Eigenschaften der FOURIER-Transformation; als erstes erhalten wir

Lemma: Für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und alle $r \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{d^r}{d\omega^r} \widehat{f}(\omega) = (-i)^r \widehat{t^r f}(\omega)$$

und

$$\omega^r \widehat{f}(\omega) = (-i)^r \widehat{f^{(r)}}(\omega) .$$

Beweis: Nach dem Lemma im vorigen Abschnitt ist

$$\frac{d^r \widehat{f}(\omega)}{d\omega^r} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^r}{d\omega^r} \left(f(t) e^{-i\omega t} \right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^r f(t) e^{-i\omega t} \, dt = (-i)^r \widehat{t^r f}(\omega) ,$$

womit die erste Aussage bewiesen wäre.

Für die zweite begnügen wir uns der Einfachheit halber mit dem Fall $r = 1$, aus dem die allgemeine Aussage per Induktion folgt. Für $r = 1$ ist

$$\omega \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \omega e^{-i\omega t} \, dt ,$$

und dieses Integral läßt sich durch partielle Integration weiter umformen. Dazu nehmen wir $f(t)$ als den ersten Faktor und $\omega e^{-i\omega t}$ als den zweiten; letzterer hat die Stammfunktion

$$\frac{\omega e^{-i\omega t}}{-i\omega} = i e^{-i\omega t} ,$$

und wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \omega e^{-i\omega t} \, dt = f(t) \cdot i e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(t) \cdot i e^{-i\omega t} \, dt .$$

Da f im SCHWARZ-Raum liegt, strebt $f(t)$ für $t \to \pm\infty$ gegen null, der erste Summand verschwindet also, und übrig bleibt

$$\omega \widehat{f}(\omega) = -i \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} \, dt = -i \cdot \widehat{\dot{f}}(\omega) .$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Die beiden Aussagen dieses Lemmas sind zentral für so ziemlich alle Anwendungen nicht nur der FOURIER-Transformation, sondern, wie wir bald sehen werden, auch für die Anwendung von Integraltranformationen überhaupt auf Differentialgleichungen.

Als erste Anwendung wollen wir uns überlegen, daß die inverse FOURIER-Transformation wirklich invers zur FOURIER-Transformation ist. Die Strategie ist folgende: Wir zeigen zunächst, daß dies für *eine* spezielle Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt, und folgern daraus in einem zweiten Schritt, daß dies für *alle* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ der Fall ist.

Für die eine spezielle Funktion aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ haben wir nicht viel Auswahl: Wir kennen bislang im wesentlichen nur zwei Beispiele, nämlich

$f(t) = e^{-t^2}$ und $f(t) = e^{-1/(t-a)(b-t)}$ auf (a, b) und null sonst. Da das erste Beispiel etwas harmloser aussieht, nehmen wir dieses, und da es den Aufwand kaum vergrößert, später aber nützlich sein wird, verallgemeinern wir es leicht zu

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} \quad \text{mit} \quad \sigma \in \mathbb{R}\,.$$

Diese Funktion heißt GAUSS-Funktion mit Varianz σ^2; ihr Graph wird auch als *Glockenkurve* bezeichnet. Abbildung 7 zeigt die Kurven für $\sigma = 1/2$ (gepunktet), $\sigma = 1$ (ausgezogen) und $\sigma = 2$ (gestrichelt); wie man sieht, wird die Kurve flacher für größere σ, wohingegen kleine σ zu einem schärfer ausgeprägten Maximum führen. Im Abschnitt über Fehlerrechnung werden uns noch genauer mit dieser Funktion beschäftigen.

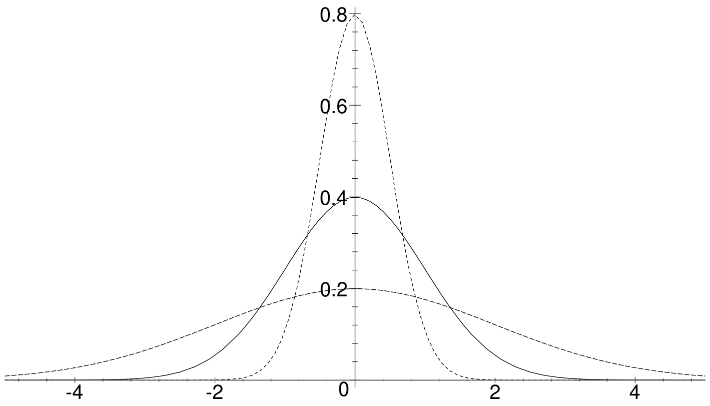

Abb. 7: Gaußkurven für $\sigma = \frac{1}{2}$, 1 und 2

Nach Definition ist

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega t}\, dt\,,$$

aber da schon die Stammfunktion von e^{-t^2} nicht elementar ausdrückbar ist, haben wir sicherlich wenig Chancen, dieses Integral über eine Stammfunktion zu berechnen.

Das Lemma aus dem vorigen Abschnitt erlaubt uns aber, Aussagen über die Ableitung von $\widehat{f}(\omega)$ machen:

$$\frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega) = (-i)\cdot\widehat{tf}(\omega) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega t}\, dt\,.$$

Der neue Integrand ist ziemlich ähnlich zur Ableitung des alten, denn

$$\frac{d}{dt} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t} = -\left(\frac{t}{\sigma^2} + i\omega\right) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}$$

oder

$$\frac{d}{dt}\left(-\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\right) = (t + i\omega\sigma^2)\, e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,.$$

Die Funktion, die hier abgeleitet wird, geht für $t \to \pm\infty$ gegen null, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t + i\omega\sigma^2)\, e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\, dt = -\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0\,,$$

und damit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\, dt = -i\omega\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\, dt\,.$$

Die Ableitung von $\widehat{f}(\omega)$ ist daher

$$\frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}\sigma}(-i\omega\sigma^2) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\, dt = -\omega\sigma^2\cdot\widehat{f}(\omega)\,.$$

Somit ist $\widehat{f}(\omega)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega) = -\omega\sigma^2\cdot\widehat{f}(\omega)\,.$$

Diese Differentialgleichung hat auch die Lösung

$$g(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\,,$$

wie man durch Differenzieren von $g(\omega)$ leicht nachrechnet, und für den Quotienten dieser beiden Lösungen ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\widehat{f}(\omega)}{g(\omega)}\right) &= \frac{d}{d\omega}\left(\widehat{f}(\omega)e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\right)\\ &= \frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega)\cdot e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} + \widehat{f}(\omega)\cdot\sigma^2\omega e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\\ &= -\omega\sigma^2\widehat{f}(\omega)e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} + \omega\sigma^2\widehat{f}(\omega)e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} = 0\,.\end{aligned}$$

Also ist der Quotient eine Konstante, d.h.

$$\widehat{f}(\omega) = \widehat{f}(0)\cdot e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\,.$$

Damit ist uns die FOURIER-Transformierte von f bekannt bis auf die Konstante

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt\,.$$

In **[HM1]**, Kap. 2, §6*c)* hatten wir auf dem Umweg über ein zweidimensionales Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

berechnet; über die Substitution $u = t/\sqrt{2}\sigma$ folgt daraus sofort

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt = 1\,.$$

Als Endergebnis erhalten wir somit

$$\widehat{f}(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1/\sigma)}e^{\frac{-\omega^2}{2\cdot(1/\sigma)^2}}\,,$$

wobei die kompliziertere zweite Form zeigt, daß es sich abgesehen vom Vorfaktor $\sqrt{2\pi}/\sigma$ wieder um eine GAUSS-Funktion handelt, allerdings mit Varianz $1/\sigma^2$.

Mit der Abkürzung

$$N_\sigma(t) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$$

können wir kurz schreiben

$$\widehat{N_\sigma}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}N_{1/\sigma}(\omega)\,.$$

Damit kennen wir natürlich auch die inverse FOURIER-Transformierte einer GAUSS-Funktion, denn nach den allgemeinen Rechenregeln ist

$$\check{N}_\sigma(\omega) = \frac{1}{2\pi}\widehat{N_\sigma}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}N_{\frac{1}{\sigma}}(\omega)\,.$$

Insbesondere können wir damit nachrechen, daß die *inverse* FOURIER-Transformation zumindest in diesem Beispiel tatsächlich invers zur FOURIER-Transformation ist, d.h.

$$\check{\widehat{N}}_\sigma(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\check{N}_{\frac{1}{\sigma}}(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sigma}}N_\sigma(t) = N_\sigma(t)\,.$$

Genauso zeigt man, daß auch

$$\widehat{\check{N}}_{\sigma(t)} = N_\sigma(t)$$

ist; die beiden Transformationen sind hier also in der Tat invers zueinander.

d) Die Umkehrung der Fourier-Transformation

Wie angekündigt, soll aus dem Beispiel des vorigen Abschnitts nun in einem zweiten Schritt gefolgert werden, daß dies nicht nur für die Funktionen N_σ gilt, sondern für *alle* Funktionen aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, d.h.

Satz: Die FOURIER-Transformation und die inverse FOURIER-Transformation definieren zueinander inverse lineare Abbildungen

$$\left\{\begin{array}{c}\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})\\ f \mapsto \widehat{f}\end{array}\right. \quad\text{und}\quad \left\{\begin{array}{c}\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})\\ g \mapsto \check{g}\end{array}\right. .$$

Insbesondere sind also beide Abbildungen Isomorphismen, und für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist

$$\check{\hat{f}}(t) = f(t)\,.$$

Für das HERMITEsche Skalarprodukt auf $\mathcal{S}^2(\mathbb{R})$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}(\omega)}\,d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\omega)\overline{\check{g}(\omega)}\,d\omega\,,$$

und damit insbesondere auch

$$\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\|\widehat{f}\right\|_2 = \sqrt{2\pi}\left\|\check{f}\right\|_2 \quad \text{mit} \quad \|f\|_2 = \sqrt{(f,f)}\,.$$

Beweis: Die Linearität ist, wie bei jedem Integral, klar; das Problem ist, ob $\widehat{f}$ und $\check{g}$ stark abfallend sind. Betrachten wir zunächst nur die Produkte $\omega^r\widehat{f}(\omega)$. Für diese ist

$$\left|\omega^r\widehat{f}(\omega)\right| = \left|(-i)^r\widehat{f^{(r)}}(\omega)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}(t)e^{-i\omega t}\,dt\right|$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} \left|f^{(r)}(t)\right|\,dt < \infty\,,$$

da f stark abfallend ist. Für

$$\omega^r\widehat{f}^{(k)}(\omega) = \omega^r(-i)^k\widehat{t^kf}(\omega)$$

können wir genauso argumentieren, und wegen des Zusammenhangs zwischen FOURIER-Tranformation und inverser FOURIER-Tranformation folgt daraus auch das Ergebnis für $\check{g}$.

Als nächstes wollen wir uns überlegen, daß für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\check{\hat{f}}(t) = f(t)$$

ist. Dazu benutzen wir zwei zunächst beliebige weitere Funktionen $g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, die wir im Laufe der Rechnung nach Bedarf genauer festlegen werden.

Nach Definition ist

$$\check{\hat{f}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\,;$$

wir betrachten das etwas allgemeinere Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}g(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega s}ds\right)e^{i\omega t}g(\omega)\,d\omega\,,$$

das wir nach dem Satz von FUBINI weiter ausrechnen können als

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega(s-t)}\,d\omega\right)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\widehat{g}(s-t)\,ds\,.$$

Nun sei a eine positive reelle Konstante und $g(\omega) = h(a\omega)$, wobei die Funktion $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ im Augenblick noch beliebig ist. Dann führt die Substitution $\nu = a\omega$ auf

$$\widehat{g}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(a\omega)e^{-i\omega s}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu)e^{-i\nu\frac{s}{a}}\,\frac{d\nu}{a}$$

$$= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} h(\nu)e^{-i\nu\frac{s}{a}}\,d\nu = \frac{1}{a}\widehat{h}\left(\frac{s}{a}\right)\,.$$

und nach obiger Rechnung ist daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}h(a\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cdot\frac{1}{a}\cdot\widehat{h}\left(\frac{s-t}{a}\right)\,ds\,.$$

Mit der neuen Variablen

$$u \underset{\text{def}}{=} \frac{s-t}{a}$$

ist $s = t + au$, und wir können diese Formel auch kürzer schreiben als

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}h(a\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+au)\cdot\widehat{h}(u)\,du\,.$$

Beide Seiten sind stetig in a; für $a \to 0$ erhalten wir auf der linken Seite

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}h(0)\,d\omega = h(0)\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = 2\pi\cdot h(0)\cdot \check{\widehat{f}}(t)$$

und rechts

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\widehat{h}(u)\,du = f(t)\int_{-\infty}^{\infty} \cdot\widehat{h}(u)\,du = 2\pi\cdot f(t)\cdot\check{\widehat{h}}(0)\,.$$

Also ist für zwei beliebige Funktionen $f, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ stets

$$h(0)\cdot\check{\widehat{f}}(t) = f(t)\cdot\check{\widehat{h}}(0)\,.$$

Setzen wir nun für h speziell eine GAUSS-Funktion ein, etwa

$$h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{2}}\,,$$

so wissen wir bereits aus dem obigem Beispiel, daß $\check{\widehat{h}}$ und h übereinstimmen; insbesondere haben beide an der Stelle $\omega = 0$ den von null verschiedenen Wert $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, so daß wir durch diesen Wert dividieren können und die gewünschte Formel

$$\check{\widehat{f}}(t) = f(t)$$

erhalten. Wegen der Beziehungen

$$\widehat{\check{f}}(\omega) = 2\pi\check{\check{f}}(-\omega) \quad \text{und} \quad \check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(-\omega)$$

ist dann auch

$$\widehat{\check{f}}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi f\big(-(-\omega)\big) = f(\omega)\,.$$

Zu beweisen bleibt noch, daß die beiden Transformationen auch das HERMITEsche Skalarprodukt auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ respektieren. Dazu wiederholen wir einfach die Rechnung zu Beginn des Beweises ohne den Faktor $e^{i\omega t}$: Für eine beliebige Funktion $g(\omega)$ aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)g(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\right)g(\omega)\,d\omega$$

nach dem Satz von FUBINI gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{g}(t)\,dt\,,$$

wir haben also die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)g(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{g}(t)\,dt\,. \qquad (*)$$

Um daraus Aussagen über das HERMITEsche Skalarprodukt herzuleiten, benutzen wir die Beziehungen

$$\widehat{\widehat{f}}(t) = 2\pi\check{\widehat{f}}(-t) = 2\pi f(-t) \quad \text{oder} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\widehat{\widehat{f}}(-t) \qquad (**)$$

und

$$\begin{aligned}\overline{\widehat{g}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g}(t)\,\overline{e^{-i\omega t}}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g}(t)\,e^{i\omega t}\,dt \\ &= -\int_{\infty}^{-\infty} \overline{g}(-t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g}(-t)e^{-i\omega t}\,dt \qquad (***)\\ &= \widehat{\overline{g}}(-t)\,,\end{aligned}$$

wobei der Übersichtlichkeit halber $\overline{g}$ für diejenige Funktion steht, die jedem Wert t den Funktionswert $\overline{g}(t) = \overline{g(t)}$ zuordnet; entsprechend ist $\overline{\widehat{g}}(t) = \overline{\widehat{g}(t)}$.

Damit läßt sich das HERMITEsche Skalarprodukt folgendermaßen umformen:

$$(f,g)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt \underset{(**)}{=} \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\widehat{f}}(-t)\overline{\widehat{\widehat{g}}}(-t)\,dt$$

$$\underset{(*)}{=} \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\widehat{\widehat{f}}}(-t)\overline{\widehat{g}}(-t)\,dt \underset{(**)}{=} \frac{1}{4\pi^2}\cdot 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\overline{\widehat{g}}(-t)\,dt$$

$$\underset{(***)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\overline{\widehat{g}}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f},\widehat{g})\,.$$

Die Aussage über das Produkt der inversen FOURIER-Transformierten folgt nun einfach daraus, daß die beiden Transformationen zueinander invers sind:

$$(\check{f},\check{g}) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{\check{f}},\widehat{\check{g}}) = \frac{1}{2\pi}(f,g)\,.$$

■

Bemerkung: Falls wir für beide Transformationen den Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}$ gewählt hätten, würden beide das HERMITEsche Skalarprodukt respektieren, allerdings müßten wir uns dann ständig mit dieser Wurzel vor den Integralen herumschlagen. So hat jede Normierung ihre Vor- und Nachteile.

e) Die Fourier-Transformation einer quadratintegrierbaren Funktion

Mit dem gerade bewiesenen Satz haben wir eine einigermaßen befriedigende Theorie der FOURIER-Transformation auf dem SCHWARZ-Raum der stark abfallenden Funktionen. Dies genügt freilich nicht, denn wir möchten auch Funktionen transformieren, die *nicht* unendlich oft stetig differenzierbar sind. Für die *Existenz* des FOURIER-Integral brauchen wir die Differenzierbarkeit nicht:

Definition: Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ heißt *absolut integrierbar,* wenn

das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$$

existiert.

Lemma: Für eine absolut integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ existiert die FOURIER-Transformierte

$$\widehat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt\,.$$

Beweis: Da $e^{-i\omega t}$ den Betrag eins hat, ist $|f(t)e^{-i\omega t}| = |f(t)|$; die Funktion $f(t)e^{-i\omega t}$ ist also absolut integrierbar, und damit existiert erst recht das uneigentliche Integral über die Funktion selbst.

■

Als *Beispiel* betrachten wir die FOURIER-Transformierte eines Rechteckimpulses

$$f(t)=\begin{cases} a & \text{für } -b\le t\le b \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\,.$$

Hier ist

$$\widehat{f}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-b}^{b} ae^{-i\omega t}\,dt = \frac{a}{-i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{-b}^{b}$$

$$= \frac{a}{\omega}\,\frac{e^{i\omega b}-e^{-i\omega b}}{i} = \frac{2a\sin\omega b}{\omega}\,.$$

Mit der in der Elektrotechnik sehr wichtigen Funktion

$$\operatorname{sinc} t = \frac{\sin t}{t}$$

läßt sich dies auch schreiben als

$$\widehat{f}(\omega)=2ab\operatorname{sinc}\omega b\,.$$

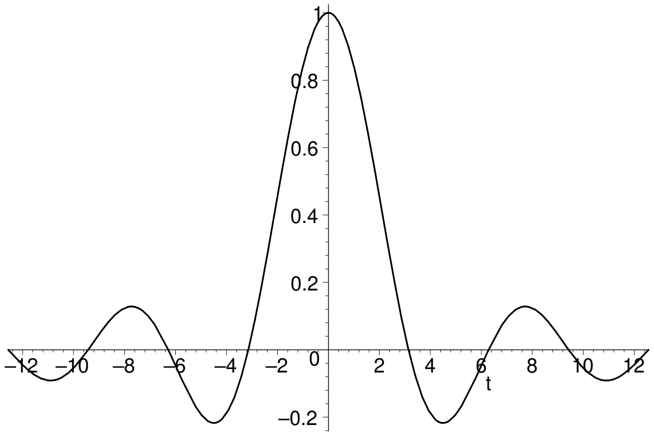

Abb. 8: Die Funktion $\operatorname{sinc} t = \frac{\sin t}{t}$

Anstelle von $\operatorname{sinc} t$ schreiben manche Autoren auch $\operatorname{si} t$, man darf die Funktion aber nicht mit Ihrer Stammfunktion, dem Ingtegralsinus $\operatorname{Si} t$, verwechseln.

Es ist möglich, eine befriedigende Theorie der FOURIER-Transformation für absolut integrierbare Funktionen zu entwickeln; die Beweise sind allerdings mathematisch recht aufwendig. Wir wollen uns daher mit weniger zufrieden geben und uns nur überlegen, daß wir eine vernünftige Theorie haben für die Funktionen, die in der Informationstechnik üblicherweise vorkommen. Solche Funktionen liegen stets in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, denn bei praktisch allen Anwendungen hängt $\|f\|_2$ mit der Energie oder Leistung des Signals f, und die muß natürlich endlich sein.

Für zwei Funktionen $f, g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ können wir $\|f - g\|_2$ als *Abstand* zwischen f und g interpretieren, und mit diesem Abstandsbegriff können wir versuchen, Funktionen die nicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ liegen, durch Funktionen aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ anzunähern:

Erinnern wir uns an die *Analysis I:* Durch wurde für eine Teilmenge

$A \subset \mathbb{R}^n$ der Abschluß $\overline{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\overline{A} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Es gibt eine Folge } (\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ \text{von } \boldsymbol{x}_n \in A \text{ mit } \lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x} \end{array} \right\}.$$

In $\mathbb{R}$ ist beispielsweise $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, da jede reelle Zahl beliebig genau durch rationale Zahlen angenähert werden kann, und der Abschluß eines offenen Intervalls ist das entsprechende abgeschlossene Intervall. Entsprechend ist im $\mathbb{R}^2$ der Abschluß der offenen Kreisscheibe gleich der angeschlossenen Kreisscheibe und so weiter.

Genauso können wir den Abschluß von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ im Raum der absolut integrierbaren Funktionen aus $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ definieren:

$$\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \underset{\text{def}}{=} \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ ist absolut integrierbar und} \\ \text{es gibt eine Folge } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ \text{von } f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ mit } \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f \end{array} \right\}.$$

Die Konvergenz ist hier natürlich im Sinne der L^2-Norm zu verstehen, und nach Definition von $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sind die Elemente $f \in \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ strenggenommen keine Funktionen, sondern Äquivalenzklassen von Funktionen, da wir alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, für die $(f, f) = 0$ ist, mit der Nullfunktion identifizieren. Damit können wir für zwei Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die dasselbe Element von $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ definieren nicht sagen, daß $f(t)$ und $g(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ übereinstimmen; wir sagen deshalb $f(t) = g(t)$ *für fast alle* $t \in \mathbb{R}$, wenn $\|f - g\|_2 = 0$ ist. Mit dieser Sprechweise gilt

Satz: Die FOURIER-Transformation und die inverse FOURIER-Transformation definieren lineare Abbildungen

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \to \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \\ f \mapsto \widehat{f} \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \to \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \\ g \mapsto \check{g} \end{cases}$$

mit der Eigenschaft, daß

$$\check{\widehat{f}}(t) = f(t) \quad \text{und} \quad \widehat{\check{g}}(t) = g(t) \quad \text{für fast alle } t \in \mathbb{R}\,.$$

Für das HERMITEsche Produkt auf $\overline{\mathcal{S}^2(\mathbb{R})}$ gilt

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f}, \widehat{g}) = 2\pi(\check{f}, \check{g})\,,$$

also insbesondere auch

$$\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\|\widehat{f}\right\|_2 = \sqrt{2\pi} \left\|\check{f}\right\|_2 .$$

Falls $\widehat{f}$ *bzw.* f hinreichend oft differenzierbar sind, gilt außerdem

$$\frac{d^r}{d\omega^r}\widehat{f}(\omega) = (-i)^r \widehat{t^r f}(\omega)$$

und

$$\omega^r \widehat{f}(\omega) = (-i)^r \widehat{f^{(r)}}(\omega)$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$.

Beweis: Wir wissen schon, daß für $f \in \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ die FOURIER-Transformierte

$$\widehat{f}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \omega \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \end{cases}$$

existiert. Schreiben wir f als Limes einer Folge von Funktionen $f_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, so wissen wir nach dem obigen Satz, daß die FOURIER-Transformierten $\widehat{f_k}$ wieder in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ liegen und daß

$$\|f_\ell - f_k\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\|\widehat{f_\ell} - \widehat{f_k}\right\|_2$$

ist. Mit der Folge der f_k konvergiert daher nach dem CAUCHYschen Konvergenzkriterium auch die der $\widehat{f_k}$. Da für jedes $N > 0$ die Folge der Integrale

$$\int_{-N}^{N} f_k(t) e^{-i\omega t}\, dt \quad \text{gegen} \quad \int_{-N}^{N} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

konvergiert, muß der Grenzwert fast überall gleich $\widehat{f}$ sein, d.h. diese Funktion existiert und liegt in $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$. Genauso zeigt man die entsprechende Aussage für $\check{g}$.

Die Linearität ist klar, und da $\check{\widehat{f}}_k(t) = f_k(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, ist im Grenzwert immer noch $\check{\widehat{f}}(t) = f(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$. Entsprechend folgen auch die Aussagen über das HERMITEsche Skalarprodukt.

Bei den Aussagen über die Ableitungen schließlich können wir den Beweis des entsprechenden Lemmas für Funktionen aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ wörtlich übernehmen; das einzige, was wir aus der Voraussetzung $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gefolgert haben, ist, daß die FOURIER-Transformierte existiert und daß $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$ ist; beides gilt auch für $f \in \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$. ■

Damit haben wir auch auf $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ eine gute FOURIER-Theorie, ein echter Fortschritt gegenüber der bisherigen Situation ist dies aber nur dann, wenn die Funktionen, die uns interessieren, auch in $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ liegen.

Beginnen wir mit dem Rechteckimpuls

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

für zwei reelle Zahlen $a < b$.

Wir kennen bereits eine Funktion in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, die auch außerhalb des Intervalls (a, b) verschwindet und in dessen Innern positiv ist, nämlich die Funktion

$$g\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} e^{\frac{-1}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Allgemeiner hat für jede reelle Zahl $r > 0$ auch

$$g_r\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} e^{\frac{-r}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

dieselbe Eigenschaft. Da $(t-a)(b-t)$ bei $t=(a+b)/2$ maximal wird, hat g_r dort sein einziges Maximum und

$$g_r\left(\frac{a+b}{2}\right)=e^{\dfrac{-4r}{(b-a)^2}}\,.$$

Unser Rechteckimpuls hat eins als Maximalwert; deshalb betrachten wir besser anstelle der g_r die mit dem Kehrwert des Maximums multiplizierten Funktionen

$$f_r\colon\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto\begin{cases}e^{\dfrac{4r}{(b-a)^2}}\,e^{\dfrac{-r}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a<t<b\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\end{cases},$$

die alle bei $(a+b)/2$ ihren Maximalwert eins annehmen.

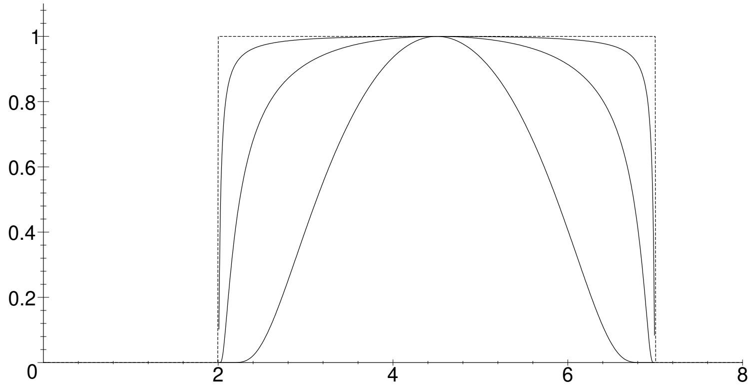

Abb. 9: Approximation des Rechteckimpulses durch stark abfallende Funktionen

Abbildung neun zeigt für $a=2$ und $b=7$ die entsprechenden Funktionen mit $r=10$, $r=1$ und für $r=0{,}1$. Die innerste Kurve für $r=10$ zeigt noch ein klar ausgeprägtes Maximum, die Kurve für $r=1$ ist schon deutlich flacher im mittleren Teil, und die für $r=0{,}1$ schließlich erinnert schon recht gut an den Rechteckimpuls f.

Diese Abbildung legt die Vermutung nahe, daß die f_r für $r\to 0$ in der L^2-Norm gegen f konvergieren. Leider können wir aber $\|f-f_r\|_2$ nicht ausrechnen, da wir keine Stammfunktion von f_r kennen. (Schon e^{-t^2} ist schließlich nicht elementar integrierbar.) Deshalb müssen wir uns mit Abschätzungen begnügen. Wir erwarten, daß f_r im mittleren Bereich immer besser mit der Geraden auch Höhe eins übereinstimmt, während es am Rand des Intervalls immer steiler gegen null geht. Daher wählen wir ein $\delta>0$ und betrachten getrennt denn mittleren Teil $[a+\delta,b-\delta]$ des Intervalls und die beiden Randintervalle $[a,a+\delta]$ und $[b-\delta,b]$.

Über das Verhalten von f_r in den Randintervallen können wir so gut wie nichts sagen; wir wissen nur, daß auf jeden Fall $0\le f_r(t)\le 1$ ist und schätzen die Differenz zwischen $f(t)=1$ und $f_r(t)$ daher ab durch eins.

Im mittleren Intervall ist die Differenz zwischen $f(t)$ und $f_r(t)$ im Intervallmittelpunkt $(a+b)/2$ gleich null und wächst dann, wie man sich durch Ableiten von f_r leicht überzeugt, monoton. Insbesondere ist f_r monoton wachsend sowohl in $t-a$ als auch in $b-t$; wir erhalten daher für das mittlere Intervall eine untere Schranke, wenn wir für beide Differenzen den Wert δ einsetzen, was auf

$$e^{\dfrac{4r}{(b-a)^2}}\,e^{\dfrac{-r}{\delta(1-\delta)}}=e^{-r\left(\dfrac{1}{\delta(1-\delta)}-\dfrac{4}{(b-a)^2}\right)}$$

führt. Für $t\in[a+\delta,b-\delta]$ gilt daher

$$f(t)-f_r(t)\le 1-e^{-r\left(\dfrac{1}{\delta(1-\delta)}-\dfrac{4}{(b-a)^2}\right)}\,.$$

Dieser Ausdruck ist nicht sehr angenehm, wir wollen ihn noch weiter abschätzen. Nach Konstruktion von f_r ist der Exponent negativ, und für alle $x\ge 0$ ist $1-e^{-x}\le x$, denn dies gilt für $x=0$, und die Ableitung e^{-x} von $1-e^{-x}$ ist für jedes positive x kleiner als die Ableitung eins von x. Daher ist für $t\in[a+\delta,b-\delta]$

$$\begin{aligned}f(t)-f_r(t)&\le 1-e^{-r\left(\dfrac{1}{\delta(1-\delta)}-\dfrac{4}{(b-a)^2}\right)}\\ &\le r\left(\frac{1}{\delta(1-\delta)}-\frac{4}{(b-a)^2}\right)\,.\end{aligned}$$