Beweis: Die FOURIER-Reihe von h sei

$$S_h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{k\cdot i\omega t}\,.$$

Da alle Summanden $c_k e^{k\cdot i\omega t}$ stetige Funktionen sind, ist wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe auch die Summe eine stetige Funktion; deren k-ter FOURIER-Koeffizient ist

$$\widehat{S_h}(k) = \left(S_h,\, e^{k\cdot i\omega t}\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{\ell=-N}^{N} c_\ell \left(e^{\ell\cdot i\omega t}, e^{k\cdot i\omega t}\right) = c_k\,,$$

wie behauptet. ■

Insgesamt haben wir damit bewiesen

Satz: Für $f, g \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ konvergiert die FOURIER-Reihe von $f \star g$ absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion. Diese hat dieselben FOURIER-Koeffizienten wie $f \star g$. ■

Unser nächstes Ziel wird nun sein, eine möglichst große Klasse von Funktionen als Faltungen darzustellen, auf die wir den gerade bewiesenen Satz anwenden können.

c) Faltung mit einem Sägezahn

Als erstes konkretes Beispiel betrachten wir für eine beliebige Funktion $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ die Faltung mit dem Sägezahn

$$s(t) = \frac{T}{2} - t \quad \text{für} \quad 0 < t < T \quad \text{und} \quad s(0) = 0\,,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T; es handelt sich hier um das Zweifache der in §2*c2)* betrachteten Funktion.

Für $t, \tau \in [0,\, T)$ liegt $t - \tau$ genau dann wieder in $[0,\, T)$, wenn $\tau \le t$ ist; andernfalls liegt $t - \tau$ im Intervall $(-T,\, 0)$, wo

$$s(t) = s(t+T) = \frac{T}{2} - (t+T) = -\frac{T}{2} - t$$

ist. Somit ist für $t, \tau \in (0,\, T)$

$$s(t-\tau) = \begin{cases} \frac{T}{2} - t + \tau & \text{für } \tau < t \\ 0 & \text{für } \tau = t \\ -\frac{T}{2} - t + \tau & \text{für } \tau > t \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned} s \star f(t) &= \frac{1}{T}\int_0^T s(t-\tau) f(\tau)\, d\tau \\ &= \frac{1}{T}\int_0^t \left(\frac{T}{2} - (t-\tau)\right) f(\tau)\, d\tau + \frac{1}{T}\int_t^T \left(-\frac{T}{2} - (t-\tau)\right) f(\tau)\, d\tau \\ &= \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2}\int_0^t f(\tau)\, d\tau - \frac{T}{2}\int_t^T f(\tau)\, d\tau + \int_0^T (\tau - t) f(\tau)\, d\tau\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^t f(\tau)\, d\tau - \int_t^T f(\tau)\, d\tau\right) + \frac{1}{T}\int_0^T (\tau - t) f(\tau)\, d\tau\,. \end{aligned}$$

Ist $F(t)$ eine Stammfunktion von $f(t)$, so ist der erste Summand gleich

$$\frac{1}{2}\big(F(t) - F(0) - F(T) + F(t)\big) = F(t) - \frac{F(0) + F(T)}{2}\,.$$

Auch das letzte Integral läßt sich durch partielle Integration weiter ausrechnen zu

$$\begin{aligned} \int_0^T (\tau - t) f(\tau)\, d\tau &= (\tau - t)F(\tau)\,\Big|_0^T - \int_0^T F(\tau)\, d\tau \\ &= (T-t)F(T) + tF(0) - \int_0^T F(\tau)\, d\tau \\ &= t\big(F(0) - F(T)\big) + TF(T) - \int_0^T F(\tau)\, d\tau\,. \end{aligned}$$

Insgesamt ist also

$$s\star f(t) = F(t)+t\big(F(0)-F(T)\big) - \frac{F(0)+F(T)}{2} + TF(T) - \int_0^T F(\tau)\,d\tau\,.$$

Abgesehen von dem Term $t\big(F(0)-F(T)\big)$ ist das eine Stammfunktion von $f(t)$, denn die drei hinteren Terme sind Konstanten, die nicht von t abhängen. Ist also insbesondere $F(T)=F(0)$, so ist $s\star f$ eine Stammfunktion von f. Dies wollen wir ausnützen, um differenzierbare Funktionen sowie eine leichte Verallgemeinerung davon als Faltungen auszudrücken um so die Konvergenz ihrer FOURIER-Reihen zu beweisen.

d) Fourier-Reihen stetiger stückweise differenzierbarer Funktionen

Definition: Eine stückweise stetige Funktion heißt stückweise differenzierbar, wenn es nur isolierte Punkte gibt, in denen f nicht stetig differenzierbar ist und wenn auch in diesen Ausnahmepunkten sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert von $\dot f(t)$ existieren.

Hier interessieren wir uns für periodische Funktionen; für diese bedeutet die Definition, daß es pro Periodenintervall höchstens endliche viele Punkte geben darf, in denen die Ableitung nicht definiert ist, aber doch zumindestest einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Grenzwert hat.

Einfache Beispiele stückweise differenzierbarer Funktionen sind die Rechteckschwingungen aus §3*c1),* die überall außer in den Sprungstellen stetig differenzierbar sind und Ableitung null haben; in den Sprungstellen verschwindet daher auch sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert.

Genauso ist beim Sägezahn aus §3*c3)* die Ableitung überall außer in den Sprungstellen gleich -1; in den Sprungstellen ist die Funktion nicht differenzierbar, aber beide Grenzwerte der Ableitung sind gleich -1.

Beispiel einer stetigen stückweise differenzierbaren Funktion ist etwa

$$f(t) = |t| \quad \text{für} \quad |t| \le 1\,,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode zwei. Für alle $t\notin\mathbb{Z}$ ist f differenzierbar; falls die größte ganze Zahl kleiner t gerade ist, ist die Ableitung +1, ansonsten -1. Bei einer geraden ganzen Zahl ist der linksseitige Grenzwert der Ableitung -1 und der rechtsseitige +1, bei einer ungeraden ist es umgekehrt.

Für eine stückweise differenzierbare Funktion können wir nicht wirklich von der abgeleiteten Funktion reden, da diese nicht in jedem Punkt existieren muß. Wir können aber eine Funktion $\varphi(t)$ definieren, die überall dort mit $\dot f(t)$ übereinstimmt, wo $\dot f(t)$ existiert; in den übrigen Punkten setzen wir $\varphi(t)$ auf irgendeinen beliebigen Wert, zum Beispiel auf null.

Die Funktion

$$\widetilde f(t) = \int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau\,.$$

ist stetig und stückweise differenzierbar, und sie hängt nicht ab vom Wert von φ in den Ausnahmepunkten; ihre Ableitung stimmt dort, wo sie definiert ist, mit φ überein. Falls f stetig ist, unterscheidet sich $\widetilde f$ daher nur um eine Konstante von f, und auch f ist eine Stammfunktion von φ.

Setzen wir nun noch zusätzlich voraus, daß $f\in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}\,\mathbb{C})$ periodisch ist, folgt aus der Rechnung im vorigen Abschnitt, daß sich $f(t)$ nur um eine Konstante vom Faltungsprodukt $s\star\varphi$ unterscheidet, denn

$$f(T)-f(0)=0$$

für eine Funktion mit Periode T.

Aus Abschnitt *b)* wissen wir, daß die FOURIER-Reihe von $s\star\varphi$ wie auch von jeder anderen Faltung absolut und gleichmäßig konvergiert; da die Addition einer Konstanten hieran nichts ändert folgt also zusammen mit den übrigen Resultaten aus Abschnitt *b)*

Satz: Ist $f\in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ stetig und stückweise differenzierbar, konvergiert die FOURIER-Reihe von f absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion S_f, die dieselben FOURIER-Koeffizienten hat wie f. ∎

e) Der Eindeutigkeitssatz

Auch wenn wir nun wissen, daß die FOURIER-Reihe zumindest für stetige stückweise differenzierbare Funktionen konvergiert, wissen wir noch nicht, wohin sie konvergiert. Diese Frage soll in diesem Abschnitt geklärt werden.

Beginnen wir mit dem einfachsten Fall einer Funktion, deren sämtliche FOURIER-Koeffizienten verschwinden, und die sich zudem noch einigermaßen anständig verhält: Bei einer stückweise stetigen Funktion existieren nach Definition in jedem Punkt die beiden Grenzwerte

$$f(t^+) \underset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{s\to t\\ s>t}} f(s) \quad \text{und} \quad f(t^-) \underset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{s\to t\\ s<t}} f(s),$$

die überall dort, wo f stetig ist, miteinander und mit $f(t)$ übereinstimmen. Für die übrigen Punkte wollen wir verlangen, daß

$$f(t) = \frac{1}{2}\big(f(t+) + f(t-)\big)$$

der Mittelwert dieser beiden Werte ist.

Satz: Für $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ seien alle FOURIER-Koeffizienten null; außerdem sei in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \frac{1}{2}\big(f(t^+) + f(t^-)\big)\,.$$

Dann ist $f(t) \equiv 0$.

Beweis: Auch hier arbeiten wir wieder mit einem Faltungsintegral, und zwar wollen wir versuchen, den Mittelwert

$$\frac{1}{2}\big(f(t+) + f(t-)\big)$$

als Faltung von f mit einer geeigneten Funktion auszudrücken. Die Funktionenfolge, die sich hierfür schließlich als nützlich erweisen wird, konstruieren wir uns über eine geometrische Reihe: Für $0 \le r < 1$ und $\omega = 2\pi/T$ ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k e^{k\cdot i\omega t} = \frac{1}{1 - re^{i\omega t}} = \frac{1 - re^{-i\omega t}}{(1 - re^{i\omega t})(1 - re^{-i\omega t})}$$
$$= \frac{1 - r\cos\omega t + ir\sin\omega t}{1 + r^2 - 2r\cos\omega t}\,;$$

wenn wir nur die Realteile betrachten ist also

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos k\omega t = \frac{1 - r\cos\omega t}{1 + r^2 - 2r\cos\omega t}\,.$$

Damit ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k\omega t = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos k\omega t - 1$$
$$= \frac{1 - r\cos\omega t - (1 + r^2 - 2r\cos\omega t)}{1 + r^2 - 2r\cos\omega t}$$
$$= \frac{r\cos\omega t - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\omega t}$$

und

$$I_r(t) \underset{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\cos k\omega t = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k\omega t$$
$$= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\omega t}\,.$$

Diese Funktion wollen wir uns für verschiedene Werte von r etwas genauer ansehen.

Abbildung fünf zeigt, daß sich I_r im offenen Intervall $(0, T)$ für $r \to 1$ immer stärker an die t-Achse annähert, wohingegen die Funktionswerte an den Intervallenden immer stärker ansteigen. In der Tat ist für $0 < t < T$

$$I_1(t) = \frac{1 - 1^2}{2 - 2\cos\omega t} = 0\,.$$

Für $t = 0$ oder T verschwindet dagegen auch der Nenner, und

$$\lim_{r\to 1} I_r(0) = \lim_{r\to 1} I_r(T) = \lim_{r\to 1} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2}$$
$$= \lim_{r\to 1} \frac{(1+r)(1-r)}{(1-r)^2} = \lim_{r\to 1} \frac{(1+r)}{(1-r)} = \infty\,.$$

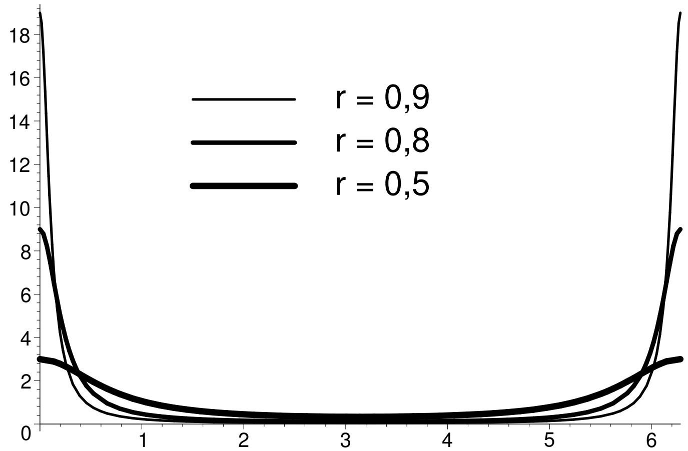

Abb. 5: $I_r(t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t}$

Die Fläche unter der Kurve I_r im Intervall $[0, T]$ ist

$$\int_0^T \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\omega t}\,dt\,,$$

ein nicht sehr angenehm aussehendes Integral.

Die Mathematik stellt allerdings seit über hundert Jahren Algorithmen zur Verfügung, mit denen sich nicht nur entscheiden läßt, ob Funktionen wie I_r eine elementar ausdrückbare Stammfunktion haben, sondern auch berechnen, wie diese Stammfunktion dann aussieht.. In den gängigen Computeralgebrasystemen sind diese Algorithmen zumindest teilweise implementiert, und wenn es auch zu weit führen würde, hier zu erklären, wie man eine Stammfunktion des Integranden

$$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\omega t}$$

findet, läßt sich doch das Ergebnis

$$F_r(t) = -\frac{2}{\omega}\arctan\left(\frac{r+1}{r-1}\tan\frac{\omega t}{2}\right) + C$$

leicht verifizieren: Nach der Kettenregel ist zunächst

$$\frac{d}{dt}\arctan\left(a\tan\frac{\omega t}{2}\right) = \frac{1}{1+a^2\tan^2\frac{\omega t}{2}}\cdot\frac{a\omega}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\omega t}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{a\omega}{\cos^2\frac{\omega t}{2}+a^2\sin^2\frac{\omega t}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\omega}{1+(a^2-1)\sin^2\frac{\omega t}{2}}\,.$$

Mit der Beziehung

$$\sin^2\frac{\omega t}{2} = \frac{1-\cos\omega t}{2}$$

wird das zu

$$\frac{1}{2}\,\frac{a\omega}{1+\frac{a^2-1}{2}-\frac{a^2-1}{2}\cos\omega t} = \frac{a\omega}{(a^2+1)-(a^2-1)\cos\omega t}\,.$$

Für $a = \dfrac{r+1}{r-1}$ ist $a^2+1 = 2\cdot\dfrac{r^2+1}{(r-1)^2}$ und $a^2-1 = \dfrac{4r}{(r-1)^2}$, also wird der Ausdruck zu

$$\frac{\frac{r+1}{r-1}\cdot\omega}{2\cdot\frac{r^2+1}{(r-1)^2}-\frac{4r}{(r-1)^2}\cos\omega t} = \frac{(r^2-1)\omega}{2(r^2+1)-4r\cos\omega t}\,.$$

Um die Ableitung von F_r zu berechnen, müssen wir das noch mit $-2/\omega$ multiplizieren, was genau den Integranden ergibt. Somit ist F_r eine Stammfunktion von I_r.

Daß es mit dieser Stammfunktion ein Problem gibt, sieht man spätestens dann, wenn man naiv einsetzt und auf

$$\int_0^T I_r(t)\,dt = F_r(T) - F_r(0) = 0 - 0 = 0$$

kommt, denn aus geometrischen Gründen ist völlig klar, daß das Integral für $r < 1$ positiv sein muß.

Das Problem ist natürlich die Singularität des Tangens im Punkt $\frac{\pi}{2}$: Für $t = \frac{T}{2}$ ist F_r nicht definiert, da der Tangens dort gegen plus oder minus unendlich geht – je nachdem, vomn welcher Seite wir kommen. Damit ist F_r keine auf dem ganzen Integrationsinvervall definierte Stammfunktion, und das Integral kann nicht einfach durch Einsetzen der oberen und der unteren Grenze berechnet werden.

Der linksseitige und der rechtsseitige Grnezwert von F_r existieren allerdings auch für $t = \frac{T}{2}$:

Für $0 < t < \frac{T}{2}$ ist $\tan \frac{\omega t}{2}$ positiv und geht gegen $+\infty$ für $t \to \frac{T}{2}$. Da der Faktor vor dem Tangens für alle $r \in (-1,\ 1)$ negativ ist, folgt

$$\lim_{\substack{t \to T/2 \\ t < T/2}} F_r(t) = -\frac{2}{\omega} \lim_{u \to -\infty} \arctan u = -\frac{2}{\omega} \frac{-\pi}{2} = \frac{T}{2}\ .$$

Für $\frac{T}{2} < t < T$ dagegen ist $\tan \frac{\omega t}{2}$ negativ und geht gegen $-\infty$ für $t \to \frac{T}{2}$. Somit ist

$$\lim_{\substack{t \to T/2 \\ t > T/2}} F_r(t) = -\frac{2}{\omega} \lim_{u \to \infty} \arctan u = -\frac{2}{\omega} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{T}{2}\ .$$

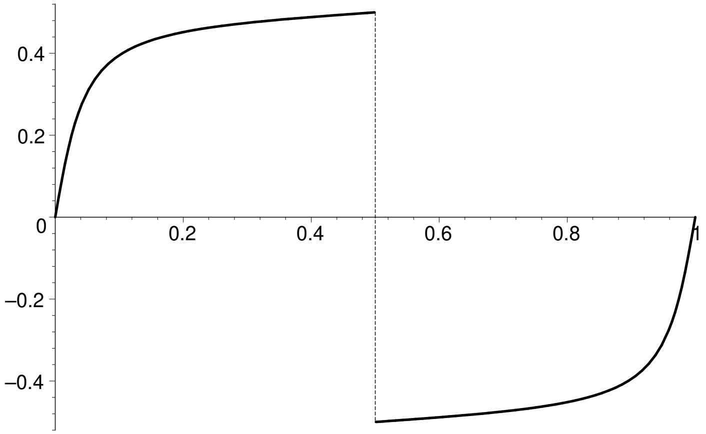

Abb. 6: $F_r(t)$ für r = 0,8 und T = 2

Abbildung sechs zeigt die Funktion F_r mit ihrer Sprungstelle in der Intervallmitte.

Zur Berechnung des Integrals von I_4 über eine Periode spalten wir es auf in zwei Teilintegrale über Intervalle, in denen wir eine Stammfunktion

haben, und erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^T I_r(t)\,dt &= \int_0^{\frac{T}{2}} I_r(t)\,dt + \int_{\frac{T}{2}}^T I_r(t)\,dt \\ &= \lim_{\substack{t \to T/2 \\ t < T/2}} F_r(t) - F_r(0) + F_r(T) - \lim_{\substack{t \to T/2 \\ t > T/2}} F_r(t) \\ &= \frac{T}{2} - 0 + 0 + \frac{T}{2} = T\ .\end{aligned}$$

Somit ist

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_r(t)\,dt = 1 \quad \text{für alle} \quad r \in (-1,\ 1)$$

und

$$\frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_r(t)\,dt = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T I_r(t)\,dt = \frac{1}{2}\ .$$

Lassen wir nun r gegen eins gehen, ändert sich natürlich nichts an diesen Formeln, aber die beiden Integrale konzentrieren sich immer mehr auf die Umgebung von $t = 0$ *bzw.* $t = T$. Damit ist anschaulich ziemlich klar, daß für eine Funktion $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ gilt

$$\begin{aligned}\lim_{r \to 1} I_r \star f(t) &= \lim_{r \to 1} \frac{1}{T} \int_0^T f(t-\tau) I_r(\tau)\,d\tau \\ &= \lim_{r \to 1} \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} f(t-\tau) I_r(\tau)\,d\tau + \int_{\frac{T}{2}}^T f(t-\tau) I_r(\tau)\,d\tau \right) \\ &= \frac{1}{2}\big(f(t^-) + f(t^+)\big)\ ,\end{aligned}$$

denn für $r \to 1$ geht $I_r(t)$ gegen null für alle t im Integrationsbereich außer $t = 0$ und $t = T$. Auf die genauen Abschätzungen zum Beweis dieser Aussage sei verzichtet.

Stattdessen wenden wir die Aussage an auf die Funktion f aus dem Satz; dafür besagt sie, daß

$$\lim_{r\to 1} I_r \star f(t) = f(t) \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Für $|r| < 1$ ist

$$I_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k\cdot i\omega t}$$

absolut und gleichmäßig konvergent; deshalb kann die Summation mit Integration vertauscht werden und wir erhalten für $I_r \star f$ auch den Ausdruck

$$\begin{aligned} I_r \star f(t) &= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k\cdot i\omega(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k\cdot i\omega t} \cdot \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau)e^{-k\cdot i\omega\tau}\,d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k\cdot i\omega t} \cdot \widehat{f}(k)\,. \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung alle FOURIER-Koeffizienten von f verschwinden, ist also $I_r \star f(t) = 0$ für alle r vom Betrag kleiner eins. Damit ist aber auch

$$f(t) = \lim_{r\to 1} I_r \star f(t) = 0 \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

wie behauptet. ■

Das war ein langer Beweis für eine nicht sonderlich aufregende Aussage; der Satz hat jedoch weitreichende Konsequenzen:

Eindeutigkeitssatz: Haben zwei Funktionen $f, g \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dieselben FOURIER-Koeffizienten, so unterscheiden sie sich höchstens an Unstetigkeitsstellen.

Beweis: Wir definieren zwei neue Funktion

$$\widetilde{f}(t) = \frac{1}{2}\big(f(t^+) + f(t^-)\big) \quad \text{und} \quad \widetilde{g}(t) = \frac{1}{2}\big(g(t^+) + g(t^-)\big)\;;$$

dann unterscheiden sich f von $\widetilde{f}$ und g von $\widetilde{g}$ höchstens in den Unstetigkeitsstellen von f *bzw.* g. Insbesondere haben f und $\widetilde{f}$ sowie g und $\widetilde{g}$ dieselben FOURIER-Koeffizienten, also auch $\widetilde{f}$ und $\widetilde{g}$.

Somit erfüllt $\widetilde{f} - \widetilde{g}$ alle Voraussetzungen des gerade bewiesenen Satzes, verschwindet also identisch. Damit ist $\widetilde{f} = \widetilde{g}$; die ursprünglichen Funktionen f und g unterscheiden sich davon höchstens in ihren jeweiligen Unstetigkeitsstellen. ■

Speziell können wir diesen Satz anwenden auf eine stetige stückweise differenzierbare Funktion f: Aus dem vorigen Abschnitt wissen wir, daß deren FOURIER-Reihe absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion S_f konvergiert, die dieselben FOURIER-Koeffizienten wie f hat. Aus dem Eindeutigkeitssatz folgt also

Satz: Die FOURIER-Reihe einer stetigen stückweise differenzierbaren Funktion $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ konvergiert absolut und gleichmäßig gegen f. ■

Kombinieren wir dies mit den speziellen Beispielen aus §2*c),* so erhalten wir den folgenden

Hauptsatz: $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sei stückweise stetig differenzierbar.
a) Ist f in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig, so konvergiert die FOURIER-Reihe dort gleichmäßig gegen f.
b) In jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ konvergiert die FOURIER-Reihe gegen

$$\frac{1}{2}\big(f(t^+) + f(t^-)\big)\,.$$

c) In jeder Sprungstelle von f tritt das GIBBS-Phänomen auf, d.h. die Teilsummen der FOURIER-Reihe überschwingen den Sprung um einen Faktor, der asymptotisch gegen $\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Si}(\pi) \approx 1{,}178979744$ konvergiert.

Beweis: Für stetiges f ist *a)* klar nach dem vorigen Satz und sowohl *b)* als auch *c)* sind auch klar, da es keine Sprungstellen gibt, so daß der Wert in *b)* immer gleich $f(t)$ ist.

Für unstetiges f seien $t_1, \ldots, t_r$ die Unstetigkeitsstellen im Intervall $[0, T)$; die Sprunghöhen dort seien

$$a_i \underset{\text{def}}{=} f(t_i^-) - f(t_i^+) .$$

Mit der aus §3*c2)* bekannten Sägezahnschwingung

$$s(t) = \begin{cases} \frac{T}{4} - \frac{t}{2} & \text{für } 0 < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases} ,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T, ist dann

$$s_i(t) \underset{\text{def}}{=} \frac{2a_i}{T} s(t - t_i)$$

eine weitere stückweise differenzierbare Funktion, die ebenfalls Sprunghöhe a_i an der Stelle t_i hat. Also ist auch

$$\widetilde{f}(t) = f(t) - \sum_{j=1}^{r} s_j(t)$$

eine stückweise differenzierbare Funktion, die nun aber *keine* Sprungstellen mehr hat; $\widetilde{f}$ ist also stetig und erfüllt daher alle Behauptungen des Satzes.

Für die Funktion s haben wir die drei Behauptungen des Satzes in §3*c3)* und §3*d)* explizit nachgerechnet; da sie unter Verschiebung und Reskalierung invariant sind, gelten sie auch für die Funktionen s_i. Damit gelten sie dann aber auch für

$$f(t) = \widetilde{f}(t) + \sum_{j=1}^{r} s_j(t) ,$$

wie behauptet.

∎

Da praktisch alle Funktionen, deren FOURIER-Reihen man in technischen Anwendungen betrachtet, stückweise differenzierbar sind, wollen wir es für die punktweise Konvergenz bei diesem Satz bewenden lassen; für sonstige stückweise stetige Funktionen wollen wir uns im nächsten Abschnitt mit einer schwächeren Konvergenzaussage begnügen.

f) Der Satz von Parseval

Im Zusammenhang mit der BESSELschen Ungleichung haben wir bereits die HERMITEschen Produkte in $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ miteinander verglichen; jetzt wollen wir sehen, daß sie dieselben Werte liefern. Auch hierbei arbeiten wir mit Faltungen; wesentliches Hilfsmittel ist der folgende, implizit schon im vorigen Abschnitt verwendete

Satz: Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ konvergiert die FOURIER-Reihe von $f \star g$ überall gleichmäßig gegen $f \star g$; sind $c_k = \widehat{f}(k)$ und $d_k = \widehat{g}(k)$ die FOURIER-Koeffizienten von f und g, ist also für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$f \star g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_k e^{-k \cdot i\omega t} .$$

∎

Aus diesem Satz lassen sich sehr einfach Eigenschaften der Faltung ableiten, z.B. gilt

Lemma: *a)* Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $f \star g = g \star f$
b) Für $f, g, h \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$

Beweis: Betrachtet man die FOURIER-Reihen, werden die Behauptungen einfach zum Kommutativ- und Assoziativgesetz der Multiplikation komplexer Zahlen.

∎

(Man könnte das Lemma natürlich auch direkt durch Integration beweisen.)

Wir wollen den obigen Satz verwenden, um folgende Formel zu beweisen:

Satz von Parseval: Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist

$$(f, g) = \left(\widehat{f}, \widehat{g}\right) ,$$

d.h. für die FOURIER-Koeffizienten c_k von f und d_k von g ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} \, dt .$$

Zum *Beweis* brauchen wir eine Funktion, deren FOURIER-Koeffizienten die Zahlen $\overline{d_k}$ sind. Komplexe Konjugation der FOURIER-Reihe zu g führt zu

$$\overline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{k\cdot i\omega t}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{d_k e^{k\cdot i\omega t}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{d_k} e^{-k\cdot i\omega t} .$$

Ersetzen wir hierin noch t durch $-t$, erhalten wir

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{d_k} e^{k\cdot i\omega t}$$

als FOURIER-Reihe von $\widetilde{g}(t) = \overline{g(-t)}$.

Somit ist $f \star \widetilde{g}$ eine Funktion mit FOURIER-Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k} e^{k\cdot i\omega t} .$$

Da die FOURIER-Reihe einer Faltung stets gleichmäßig konvergiert und dieselben FOURIER-Koeffizenten hat wie die Faltung selbst, folgt aus dem Eindeutigkeitssatz des vorigen Abschnitts, daß diese Reihe in jedem Punkt t gegen $f \star \widetilde{g}(t)$ konvergiert. Speziell für $t = 0$ ist daher einerseits

$$f \star \widetilde{g}(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k}$$

und andererseits

$$f \star \widetilde{g}(0) = \widetilde{g} \star f(0) = \frac{1}{T}\int_0^T \widetilde{g}(-\tau) f(\tau)\, d\tau = \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau)\overline{g(\tau)}\, d\tau .$$

Damit ist der Satz bewiesen. ■

Korollar: Sind $c_k = \widehat{f}(k)$ die FOURIER-Koeffizienten von f, so ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\, dt .$$

Gelegentlich wird auch dieses Korollar als Satz von PARSEVAL bezeichnet.

Der französische Mathematiker MARC-ANTOINE PARSEVAL DES CHÊNES (1755–1836) publizierte nur fünf mathematische Arbeiten; die 1799 veröffentlichte zweite davon enthält den hier betrachteten Satz.
Als überzeugter Royalist kam PARSEVAL während der französischen Revolution 1792 ins Gefängnis; später mußte er aus Frankreich fliehen, weil ihn NAPOLEN wegen regimekritischer Gedichte verhaften lassen wollte.

Obiges Korollar liefert oft interessante spezielle Werte unendlicher Reihen: Für den Sägezahn mit Periode 2π etwa ist im Intervall $(0, 2\pi)$

$$s(t) = \frac{\pi - t}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2ki} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

mit

$$c_k = \begin{cases} -\frac{i}{2k} & \text{für } k > 0 \\ 0 & \text{für } k = 0 \\ \frac{i}{2k} & \text{für } k < 0 \end{cases} .$$

Somit ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} .$$

Außerdem ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi - t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\, dt = \frac{1}{8\pi}\cdot 2\cdot\frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{12} .$$

Somit ist

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

Der Satz von PARSEVAL liefert auch schnell die im vorigen Abschnitt angekündigte schwächere Konvergenzaussage für beliebige stückweise stetige periodische Funktionen: Mit dem HERMITEschen Produkt in $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ können wir in der üblichen Weise eine Norm

$$\|f\|_{2,T} = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\, dt}$$

definieren und sagen, eine Folge $f_1, f_2, \dots$ konvergiere in der L^2-Norm gegen f, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{2,T} = 0$$

ist. Dann gilt:

Satz: Für jedes $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ konvergiert die FOURIER-Reihe in der L^2-Norm gegen f.

Beweis: Wie wir beim Beweis der BESSELschen Ungleichung gesehen haben, gilt mit $c_k = \widehat{f}(k)$ für die Teilsumme

$$S_N = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{k\cdot i\omega t},$$

daß

$$\|f - S_N\|_{2,T}^2 = (f - S_N,\ f - S_N) = (f,\ f) - \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 .$$

Nach dem Satz von PARSEVAL geht die rechts stehende Differenz für $N \to \infty$ gegen null, also auch $\|f - S_N\|_{2,T}$.

■

g) Eine Anwendung

Bei bildgebenden Verfahren der Medizintechnik, bei Werkstoffuntersuchungen, Wärmeleitungsproblemen und vielen anderen Anwendungen hat man es oft mit folgendem *Randwertproblem* zu tun: Man kennt eine Funktion am Rand einer Fläche oder eines Volumens und möchte sie auch im (physikalisch oft unzugänglichen) Innern berechnen.

Sofern man keine einschränkenden Annahmen über die Funktion macht, ist dieses Problem natürlich weit von einer eindeutigen Lösbarkeit entfernt; in vielen interessanten Fällen ist es allerdings eindeutig lösbar.

Wir wollen hier nur ein ganz einfaches Beispiel betrachten: Eine auf der Kreislinie bekannte Funktion, die ins Kreisinnere hinein fortgesetzt werden soll. Dabei wollen wir verlangen, daß die Funktion überall der *Kontinuitätsgleichung*

$$\Delta u = 0$$

genügt, wie das beispielsweise für elektrische Potentiale in Abwesenheit von Ladungen der Fall ist.

In Polarkoordinaten ausgedrückt ist der LAPLACE-Operator nach **[HM1]**, Kap. 2, §4*g)* gleich

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} ;$$

für $u(r,\varphi) = r^k \cos k\varphi$ und $u(r,\varphi) = r^k \sin k\varphi$ rechnet man leicht nach, daß $\Delta u = 0$ ist. Damit ist auch

$$\Delta(r^n e^{\pm k\cdot i\varphi}) = 0$$

und allgemeiner

$$\Delta u(r,\varphi) = 0 \quad \text{für} \quad u(r,\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k r^{|k|} e^{k\cdot i\omega t},$$

falls die Summe konvergiert. Für ein Randwertproblem ist die Funktion brauchbar, wenn zusätzlich auch noch

$$u_0(\varphi) \underset{\text{def}}{=} \lim_{r\to 1} u(r,\varphi)$$

für alle Winkel φ existiert.

Ein spezielles Beispiel einer konvergenten Summe ist die Funktion I_r aus Abschnitt *e);* wenn wir als Argument anstelle von ωt die Winkelvariable φ einsetzen, ist für $|r| < 1$

$$I_r(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k\cdot i\varphi} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\varphi} .$$

Da $I_r \star u_0$ für stetige Funktionen im Limes $r \to 1$ gerade u_0 ist, ist für eine vorgegebene Funktion u_0

$$u(r,\varphi) = I_r \star u_0(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - r^2)u_0(\psi)}{1 + r^2 - 2r\cos(\varphi - \psi)}\, d\psi$$

eine Fortsetzung ins Innere mit $\Delta u(r,\varphi) = 0$. Das ist die POISSONsche Integralformel zur Lösung dieses einfachen Randwertproblems.

SIMÉON DENIS POISSON (1781–1840) studierte zunächst Medizin, dann ab 1798 Mathematik an der *Ecole Polytechnique* bei LAPLACE und LAGRANGE. 1802 bekam er eine Stelle als Astronom am *Bureau des Longitudes,* 1809 wurde er Professor für reine Mathematik an der neugegründeten *Faculté des Sciences.* Er arbeitete hauptsächlich über bestimmte Integrale und FOURIER-Theorie, schrieb aber auch ein wichtiges Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitstheorie (in dem die POISSON-Verteilung erstmalig auftauchte) und Arbeiten über Mechanik, Astronomie, Elektrizität und Magnetismus.

§4: Die Fourier-Transformation

Die FOURIER-Transformation leistet für nichtperiodische Signale das, was FOURIER-Reihen für periodische Signale leisten; zur Herleitung ihrer Definition und ihrer wesentlichen Eigenschaften gehen wir daher aus von FOURIER-Reihen.

a) Fourier-Reihen und Fourier-Integrale

In den vorigen Paragraphen haben wir periodische Funktionen mittels ihrer FOURIER-Reihen als Überlagerungen reiner Schwingungen dargestellt. Diese Zerlegung einer Funktion in Sinus- und Cosinusschwingungen verschiedener Frequenzen ist nicht nur für periodische Funktionen nützlich; angesichts der Tatsache, daß das Verhalten vieler elektronischer Bauteile von der Frequenz abhängt, würde man gerne *jede* Funktion entsprechend zerlegen. Es ist allerdings klar, daß FOURIER-Reihen, wie wir sie bislang kennen, dazu nicht geeignet sind, denn da dort alle beteiligten Frequenzen Vielfache eine festen Grundfrequenz sind, muß auch die Summe mindestens die der Grundfrequenz entsprechende Periode haben. Trotzdem liefern FOURIER-Reihen einen Ansatz auch für zumindest einige Klassen nichtperiodischer Funktionen.

Für eine beliebige reelle Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wählen wir dazu zunächst eine (große) Periode T und betrachten die Funktion $f_T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf dem Intervall $(-T/2, T/2]$ mit f übereinstimmt und dann periodisch mit Periode T auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Die FOURIERreihe von f_T ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ki\omega t} \quad \text{mit} \quad c_k = \widehat{f}_T(k) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ki\omega t}\, dt$$

und $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Um f selbst darzustellen, müssen wir T gegen unendlich gehen lassen; um das Verhalten von c_k bei Veränderung von T kontrollieren zu können, definieren wir dazu eine Funktion $C(\nu)$ als

$$C(\nu) \underset{\text{def}}{=} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\nu t}\, dt\,.$$

Mit dieser Definition ist

$$c_k = \frac{1}{T} C(k\omega) = \frac{\omega}{2\pi} C(k\omega)\,,$$

und die FOURIERreihe von f_T läßt sich schreiben als

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k\omega) e^{i(k\omega)t} \omega\,.$$

Wäre dies eine endliche Summe, etwa

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} C(k\omega) e^{i(k\omega)t} \omega\,,$$

so könnten wir sie auffassen als RIEMANN-Summe für

$$\int_{-N\omega}^{(N+1)\omega} \frac{1}{2\pi} C(\nu) e^{i\nu t}\, d\nu$$

bei einer äquidistanten Unterteilung mit Intervallbreite ω. Falls also ω gegen Null geht (und damit $T = 2\pi/\omega$ gegen unendlich) und gleichzeitig N gegen unendlich, konvergiert die FOURIERreihe gegen das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} C(\nu) e^{i\nu t}\, d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\nu) e^{i\nu t}\, d\nu\,,$$

sofern dieses existiert.

Im Idealfall sollte also gelten

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\nu) e^{i\nu t}\, d\nu \quad \text{mit} \quad C(\nu) \underset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\nu t}\, dt$$

und wir definieren

Definition: Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bezeichnen wir die Funktion

$$\widehat{f}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \omega \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \end{cases},$$

so sie existiert, als FOURIER-Transformierte von f.

Damit sollte dann also gelten

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega\,,$$

und diese Konstruktion, die f aus $\widehat{f}$ rekonstruiert, heißt *inverse* FOURIER-*Transformation:*

Definition: Für $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bezeichnen wir die Funktion

$$\check{g}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \displaystyle\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \end{cases}$$

als inverse FOURIER-Transformierte von g.

Offensichtlich ist

$$\check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(-\omega) \quad \text{und} \quad \widehat{g}(t) = 2\pi \check{g}(-t)\,.$$

Je nach Buch oder Vorlesung werden die Vorfaktoren gelegentlich auch anders gewählt, beispielsweise stand in der HM II bis 1998 der Faktor $1/2\pi$ vor der FOURIER-Transformation selbst statt vor ihrer inversen. Die jetzt gewählte Definition paßt besser zu der aus der hießigen Elektrotechnik; dort wird die FOURIER-Transformation als

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

definiert, wobei j wie in der Elektrotechnik üblich für die in der Mathematik und Physik mit i bezeichnete imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ steht, d.h. $F(j\omega) = \widehat{f}(\omega)$.

Einige Autoren bevorzugen es auch, aus Symmetriegründen bei beiden Transformationen einen Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}$ zu verwenden. In allen

Fällen sind die Faktoren so aufeinander abgestimmt, daß für hinreichend gutartige Funktionen die Beziehungen

$$\check{\hat{f}}(t) = f(t) \quad \text{und} \quad \hat{\check{f}}(t) = f(t)$$

gelten.

Die Existenz der FOURIER-Transformierten, d.h. die Konvergenz des uneigentlichen Integrals aus der Definition, sowie auch die obigen Formeln für $\check{\hat{f}}$ und $\hat{\check{f}}$ sind leider alles andere als selbstverständlich: Für $f(t) = 1$ oder auch $f(t) = e^{i\omega t}$ oder $f(t) = t^n$ und in vielen weiteren Fällen kann das Integral für $\hat{f}(\omega)$ schon aus ganz trivialen Gründen nicht existieren.

Wenn wir sicher sein wollen, daß alles gut geht, müssen wir deshalb Bedingungen an die Funktion f stellen. Zur Vorsicht stellen wir zunächst einmal übertrieben starke Forderungen, zeigen, daß mit denen alles gut geht, und schrauben sie dann in einem nächsten Schritt wieder auf ein realistisches Maß herunter.

Definition: Eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *stark abfallend,* wenn die Funktionen

$$t \mapsto \left| t^r f^{(k)}(t) \right|$$

für alle $k, r \geq 0$ beschränkt sind. Die Menge aller stark abfallender Funktionen bezeichen wir als SCHWARZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

KARL HERMAN AMANDUS SCHWARZ (1843–1921), nach dem dieser Raum benannt wurde, ist uns bereits bekannt von der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung aus **[HM1]**, Kap. 2, §1*a)*; auch diese Ungleichung wird uns in Kürze wieder begegnen.

Es ist klar, daß auch Summen und skalare Vielfache von stark abfallenden Funktionen stark abfallend sind; der SCHWARZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist daher ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Beispiele: *a)* Die Funktion $f(t) = e^{-t^2}$ liegt in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$: Sie ist beliebig oft stetig differenzierbar; ihre Ableitungen haben jeweils die Form $P(t)e^{-t^2}$ mit einem geeigneten Polynom P. Da die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom, geht e^{-t^2} schneller gegen Null als ein Polynom gegen unendlich gehen kann, das Produkt geht also für $t \to \pm\infty$ gegen Null und ist daher auf ganz $\mathbb{R}$ beschränkt.

b) Sei

$$f(t) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Da diese Funktion außerhalb des Intervalls (a, b) verschwindet und im Innern stetig ist, ist sie natürlich beschränkt. Ihre Ableitungen sind Produkte aus rationalen Funktionen mit f selbst; da $f(t)$ für $t \to a$ oder $t \to b$ erheblich schneller gegen null geht als eine rationale Funktion gegen unendlich gehen kann, haben alle Ableitungen an den Intervallgrenzen den Wert null; die Funktion ist also beliebig oft stetig differenzierbar. Die Beschränktheitsbedingungen sind problemlos: Im kompakten Intervall $[a, b]$ ist jede stetige Funktion beschränkt, und außerhalb sind alle hier betrachteten Funktionen null.

Ein erster Hinweis darauf, daß wir in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ nur selten Probleme mit der Existenz von Integralen haben dürften, gibt das folgende

Lemma: *a)* Für eine Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ existieren

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t)}\,dt .$$

b) Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $\omega \in \mathbb{R}$ existiert das FOURIER-Integral

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt ;$$

für $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $t \in \mathbb{R}$ existiert das inverse FOURIER-Integral

$$\check{g}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega .$$

c) Die Abbildung

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ (f, g) \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt \end{cases}$$