Speziell für $\tau = -T/2$ ist also auch

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt \quad \text{und} \quad a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega t\,dt$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, und

$$b_\ell = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin \ell\omega t\,dt \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}\,.$$

Ist nun f eine ungerade Funktion, so sind auch alle Funktionen $f(t)\cos k\omega t$ ungerade, d.h.

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = 0 \quad \text{und} \quad a_k = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega t\,dt = 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f(t)\sin \ell\omega t$ ist Produkt zweier ungerader Funktionen und somit gerade; dies liefert die Beziehung

$$b_\ell = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin k\omega t\,dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\sin k\omega t\,dt\,,$$

die je nach der speziellen Form von f entweder nützlich ist oder auch nicht. Auf jeden Fall gibt es aber bei einer ungeraden Funktion in der FOURIER-Reihe keine Cosinusterme (einschließlich des konstanten Terms zu $\cos 0 = 1$); nur Sinusterme können von Null verschiedene Koeffizienten haben.

Für eine gerade Funktion f ist $f(t)\cdot\sin \ell\omega t$ als Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ungerade, d.h.

$$b_\ell = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin \ell\omega t\,dt = 0$$

für alle ℓ. Somit sind keine Sinusterme möglich; nur Cosinusterme (einschließlich des konstanten Terms) können auftreten. Weiter ist

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega t\,dt = 2\int_{0}^{T/2} f(t)\cos k\omega t\,dt\,,$$

was wiederum in Abhängigkeit von der speziellen Gestalt von f entweder nützlich ist oder auch nicht.

c) Beispiele von Fourier-Reihen

1.) Periodische Rechteckimpulse: Hier betrachten wir die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} h & \text{für } 0 \le t < \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} \le t < T \end{cases} \quad \text{mit} \quad f(t+T) = f(t) \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}\,;$$

offensichtlich ist $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Außerdem ist f eine ungerade Funktion, d.h. es gibt nur Sinusterme. Für diese ist

$$\begin{aligned} b_\ell &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin \ell\omega t\,dt = \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} h\sin \ell\omega t\,dt - \int_{T/2}^{T} h\sin \ell\omega t\,dt\right) \\ &= \frac{2h}{T}\left(-\frac{\cos \ell\omega\frac{T}{2} - 1}{\ell\omega} + \frac{\cos \ell\omega T - \cos \ell\omega\frac{T}{2}}{\ell\omega}\right) \\ &= \frac{2h}{T}\left(\frac{(-1)^{\ell+1} + 1 + 1 + (-1)^{\ell+1}}{\ell\omega}\right)\,, \end{aligned}$$

denn da $\omega T = 2\pi$, ist $\omega T/2 = \pi$ und $\cos \ell\pi = (-1)^\ell$. Somit ist

$$b_\ell = \begin{cases} 0 & \text{für gerade } \ell \\ \dfrac{2h}{T}\cdot\dfrac{4}{\ell\omega} = \dfrac{4h}{\pi\ell} & \text{für ungerade } \ell \end{cases}$$

und

$$S_f(t) = \frac{4h}{\pi}\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell-1)\omega t}{(2\ell-1)}\,.$$

Wir sollten nicht zu optimistisch sein und erwarten, daß diese FOURIER-Reihe in jedem Punkt t gegen $f(t)$ konvergiert: Wir hätten einen Rechteckimpuls mit Periode T im Intervall $[0,T)$ beispielsweise auch durch

$$g(t) = \begin{cases} h & \text{für } 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

definieren können. $f(t)$ und $g(t)$ unterscheiden sich im Intervall $[0,T]$ nur an der Stelle $t = \frac{T}{2}$ unterscheiden, was bei der Berechnung cder Integrale für die FOURIER-Koeffizienten keine Rolle spielt. Die beiden Funktionen haben daher dieselbe FOURIER-Reihe, und diese kann, selbst wenn sie konvergiert, an der Stelle $t = \frac{T}{2}$ nicht sowohl gegen $f(\frac{T}{2}) = -h$ und $g(\frac{T}{2}) = h$ konvergieren. (Tatsächlich konvergiert sie, da $\omega\frac{T}{2} = \pi$ ist und der Sinus bei allen Vielfachen von π verschwindet, gegen den Mittelwert null der beiden Funktionswerte.)

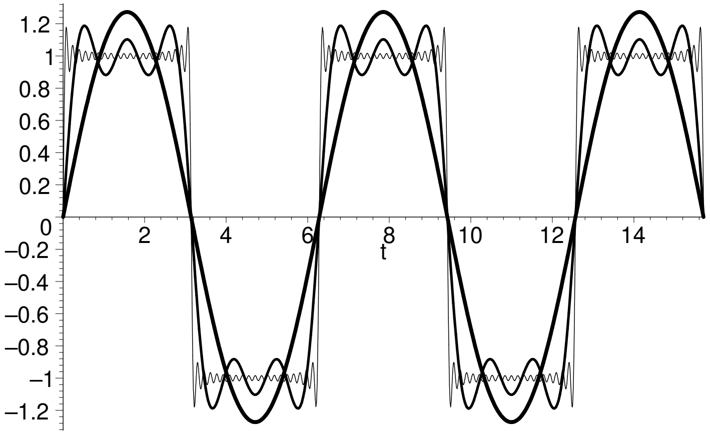


Abb. 1: FOURIERpolynome für Rechteckimpulse

Experimentell konvergiert die berechnete Reihe abgesehen von den Sprungstellen anscheinend recht gut: Abbildung eins zeigt die Teilsummen mit oberen Grenzen 1, 3 und 20 Summanden, die die Funktion f offensichtlich immer besser annähern. Gerade für die größeren Werte ist dieses Bild natürlich etwas gestört durch numerische Fehler und *alias*-Effekte der Rastergraphik; keine solche Störung sind allerdings die Überschwingungen an den Unstetigkeitsstellen von f: Dieses sogenannte GIBBS-Phänomen ist eine mathematisch unvermeidbare Eigenschaft von FOURIERreihen stückweise stetiger Funktionen, mit der wir uns in Kürze näher beschäftigen werden.

Im Augenblick sei nur kurz auf eine Anwendung dieser Überschwingungen hingewiesen: Die Pixel auf einem Computerbildschirm werden durch Rechteckimpulse geschaltet, wobei aus physikalischen Gründen Oberschwingungen hoher Frequenz bei der Übertragung so stark gedämpft werden, daß für alle praktischen Zwecke nur so etwas wie eine endliche Teilsumme der FOURIER-Reihe übertragen wird. Die in Abbildung eins zu sehenden höherfrequenten Anteile lassen sich mit einem Funkempfänger auffangen und können dann zur Rekonstruktion des Bildschirminhalts verwendet werden; zumindest bei sensitiven Anwendungen muß ein Computer daher so abgeschirmt sein, daß er keine solchen Strahlungen aussendet.

2.) Sägezahnimpulse: Hier betrachten wir die Funktion

$$f(t) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} \quad \text{für} \quad 0 < t < T \quad \text{und} \quad f(0) = 0\,,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T auf ganz $\mathbb{R}$.

Dies ist eine ungerade Funktion, denn für $0 < t < T$ ist

$$f(-t) = f(-t+T) = \frac{T}{4} - \frac{(-t+T)}{2} = \frac{t}{2} - \frac{T}{4} = -f(t)\,,$$

und $f(0) = 0$, wie es sich für eine ungerade Funktion gehört. Die FOURIER-Reihe von f enthält daher nur Sinusterme.

Zu deren Berechnung setzen wir wie üblich

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

und erhalten den Koeffizienten von $\sin \ell\omega t$ als

$$\begin{aligned} b_\ell &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin \ell\omega t\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T \left(\frac{T}{4}-\frac{t}{2}\right)\sin \ell\omega t\,dt \\ &= \frac{2}{T}\cdot\frac{T}{4}\int_0^T \sin \ell\omega t\,dt - \frac{2}{T}\cdot\frac{1}{2}\int_0^T t\sin \ell\omega t\,dt \\ &= -\frac{1}{T}\int_0^T t\sin \ell\omega t\,dt\,, \end{aligned}$$

da das Integral einer Sinusfunktion über eine oder mehrere volle Perioden verschwindet. Zur weiteren Rechnung wenden wir die Methode der partiellen Integration an:

$$\int u(t)\cdot\dot v(t)\,dt = u(t)\cdot v(t) - \int \dot u(t)\cdot v(t)i\,dt$$

ergibt für $u(t) = t$ und $\dot v(t) = \sin \ell\omega t$ mit der Stammfunktion $v = -\frac{1}{\ell\omega}\cos \ell\omega t$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \int t\sin \ell\omega t\,dt &= -t\frac{\cos \ell\omega t}{\ell\omega} + \frac{1}{\ell\omega}\int \cos \ell\omega t\,dt \\ &= -t\frac{\cos \ell\omega t}{\ell\omega} + \frac{1}{\ell^2\omega^2}\sin \ell\omega t + C\,. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} b_\ell &= -\frac{1}{T}\left(\frac{-T\cdot\cos \ell\omega T - 0\cdot\cos 0}{\ell\omega} + \frac{\sin \ell\omega T - \sin 0}{\ell^2\omega^2}\right) \\ &= \frac{1}{\ell\omega}\cos(\ell\cdot 2\pi) = \frac{1}{\ell\omega} \end{aligned}$$

und

$$S_f(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega}\,.$$

Wieder haben wir keine Ahnung, ob und gegebenenfalls wohin diese Reihe konvergiert – außer bei den ganzzahligen Vielfachen von $T/2$,

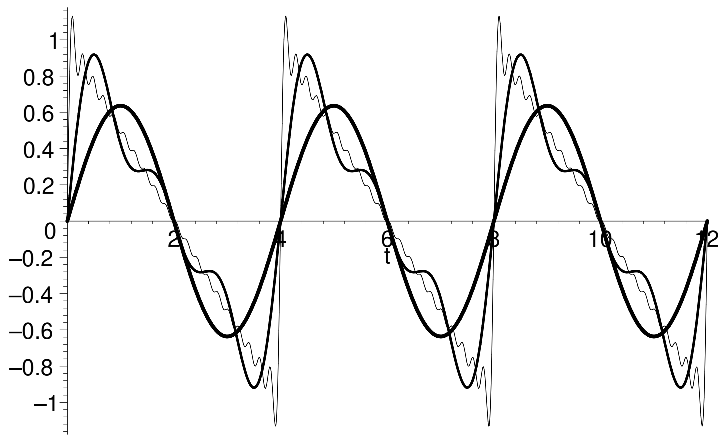


Abb. 2: FOURIERpolynome für die Sägezahnschwingung

denn dort verschwinden alle Sinusfunktionen in den Zählern, so daß die Summe gleich null ist.

Abbildung 2 zeigt die Teilsummen mit 1, 3 und 20 Summanden für $T = 4$; anscheinend nähern diese die Funktion recht gut an, allerdings gibt es wieder Überschwingungen an den Sprungstellen, denn für $T = 4$ haben wir einen Sägezahn, der zwischen +1 und -1 hin- und herpendelt.

3.) Konvergenz: Als nächstes wollen, zunächst für Sägezahnschwingungen, die Konvergenz der FOURIER-Reihe untersuchen. Für $t = 0$ und damit auch für alle Vielfachen von T sind alle Summanden null, die Reihe konvergiert also gegen null.

Für t aus dem offenen Intervall $(0, T)$ können wir folgendermaßen vorgehen: Die Summanden $\frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega}$ sind Stammfunktionen der Funktionen $\cos \ell\omega t$; also ist

$$\sum_{\ell=1}^{N}\frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} \quad \text{Stammfunktion von} \quad \sum_{\ell=1}^{N}\cos \ell\omega t\,.$$

Auch die Funktion f läßt sich im Intervall $(0, T)$ als Stammfunktion schreiben: Dort ist

$$f(t)=\frac{T}{4}-\frac{t}{2}=\int\limits_{T/2}^{t}\left(\frac{-1}{2}\right)\,d\tau\,,$$

und da auch

$$\int\limits_{T/2}^{t}\cos\ell\omega\tau\,d\tau=\frac{\sin\ell\omega t-\sin\ell\omega T/2}{\ell\omega}=\frac{\sin\ell\omega t-\sin\ell\pi}{\ell\omega}=\frac{\sin\ell\omega t}{\ell\omega}$$

ist, erhalten wir die Differenz zwischen $f(t)$ und der N-ten Teilsumme als Integral:

$$\sum_{\ell=1}^{N}\frac{\sin\ell\omega t}{\ell\omega}-f(t)=\int\limits_{T/2}^{t}\left(\sum_{\ell=1}^{N}\cos\ell\omega\tau-\left(\frac{-1}{2}\right)\right)\,d\tau$$

$$=\int\limits_{T/2}^{t}\left(\frac{1}{2}+\sum_{\ell=1}^{N}\cos\ell\omega\tau\right)\,d\tau\,.$$

Diesen Integranden können wir über die komplexe Darstellung des Cosinus ausrechnen:

$$\frac{1}{2}+\sum_{\ell=1}^{N}\cos\ell\omega\tau=\frac{1}{2}+\sum_{\ell=1}^{N}\frac{e^{\ell\cdot i\omega\tau}+e^{-\ell\cdot i\omega\tau}}{2}=\frac{1}{2}\sum_{\ell=-N}^{N}e^{\ell\cdot i\omega\tau}$$

$$=\frac{1}{2}e^{-N\cdot i\omega\tau}\sum_{\ell=0}^{2N}e^{\ell\cdot i\omega\tau}$$

ist im wesentlichen eine geometrische Reihe, und die läßt sich bekanntlich leicht ausrechnen: Da

$$(1-q)\sum_{j=0}^{r}q^j=\sum_{j=0}^{r}q^j-\sum_{j=1}^{r+1}q^j=1-q^{r+1}$$

ist, folgt für $q\neq 1$ die Formel

$$\sum_{j=0}^{r}q^j=\frac{1-q^{r+1}}{1-q}\,.$$

In unserem Fall ist $q=e^{i\omega\tau}$ und somit

$$\sum_{\ell=0}^{2N}e^{\ell\cdot i\omega\tau}=\frac{1-e^{(2N+1)\cdot i\omega\tau}}{1-e^{i\omega\tau}}\,.$$

Also ist

$$\frac{1}{2}+\sum_{\ell=1}^{N}\cos\ell\omega\tau=\frac{1}{2}e^{-N\cdot i\omega\tau}\frac{1-e^{(2N+1)\cdot i\omega\tau}}{1-e^{i\omega\tau}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{e^{-N\cdot i\omega\tau}-e^{(N+1)\cdot i\omega\tau}}{1-e^{i\omega\tau}}\,.$$

Erweiterung des Bruchs mit $e^{\frac{1}{2}\cdot i\omega\tau}$ führt auf die symmetrischere Form

$$\frac{1}{2}\frac{e^{-(N+\frac{1}{2})\cdot i\omega\tau}-e^{(N+\frac{1}{2})\cdot i\omega\tau}}{e^{-\frac{1}{2}\cdot i\omega\tau}-e^{\frac{1}{2}\cdot i\omega\tau}}=\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\tau}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}\,.$$

Damit ist

$$\sum_{\ell=1}^{N}\frac{\sin\ell\omega t}{\ell\omega}-f(t)=\int\limits_{T/2}^{t}\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\tau}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}\,d\tau\,.$$

Die FOURIER-Reihe konvergiert genau dann im Punkt t gegen $f(t)$, wenn dieses Integral für $N\to\infty$ gegen null geht.

Die Suche nach einer Stammfunktion sieht ziemlich hoffnungslos aus; trotzdem hilft partielle Integration zu einem besseren Verständnis des Integrals. Wir wenden die Regel an mit

$$u(\tau)=\frac{1}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}\quad\text{und}\quad\dot v(\tau)=\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\tau\,,$$

d.h.

$$v(\tau)=-\frac{\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\tau}{\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega}\,;$$

das Integral wird zu

$$-\frac{\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega t}{(2N+1)\omega\sin\frac{\omega t}{2}}+\int\limits_{T/2}^{t}\frac{\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\tau}{\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}\right)\,d\tau\,,$$

denn an der unteren Grenze ist

$$\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\frac{T}{2} = \cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi = 0\,.$$

Auf das noch verbleibende Integral wenden wir den Mittelwertsatz der Integralrechung in seiner allgemeinen Form an:

Für eine im Intervall $[a,\,b]$ *stetige Funktion* v *und eine in* $[a,\,b]$ *integrierbare Funktion* w *gibt es einen Wert* $\zeta \in [a,\,b]$*, so daß gilt*

$$\int_a^b v(\tau)w(\tau)\,d\tau = v(\zeta)\int_a^b w(\tau)\,d\tau\,.$$

Für alle, die den Satz nicht in dieser Form kennen, sei der *Beweis* kurz nachgetragen: Als stetige Funktion nimmt v im Intervall $[a,\,b]$ sowohl seinen Maximalwert $v_{\max}$ als auch seinen Minimalwert $v_{\min}$ an. Der Wert des linksstehenden Integrals liegt dann zwischen

$$v_{\min}\int_a^b w(\tau)\,d\tau \quad \text{und} \quad v_{\max}\int_a^b w(\tau)\,d\tau\,,$$

es gibt also einen Wert $v_0 \in [v_{\min},\,v_{\max}]$, so daß

$$\int_a^b v(\tau)w(\tau)\,d\tau = v_0\int_a^b w(\tau)\,d\tau$$

ist. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt v als stetige Funktion diesen Wert v_0 irgendwo an, es gibt also ein $\zeta \in [a,\,b]$, so daß $v(\zeta) = v_0$ ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Hier setzen wir

$$v(\tau) = \frac{\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\tau}{\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega} \quad \text{und} \quad w(\tau) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}\right)\,;$$

wir erhalten

$$\int_{T/2}^{t} \frac{\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\tau}{\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega}\,\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}\right)d\tau$$

$$= \frac{\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\zeta}{(2N+1)\omega}\int_{T/2}^{t}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\sin\frac{\omega\tau}{2}}\right)d\tau$$

$$= \frac{\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\zeta}{(2N+1)\omega}\left(\frac{1}{\sin\frac{\omega t}{2}} - 1\right)\,,$$

denn $\sin\frac{\omega T}{4} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Also ist

$$\sum_{\ell=1}^{N}\frac{\sin\ell\omega t}{\ell\omega} - f(t)$$

$$= -\frac{\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega t}{(2N+1)\omega\sin\frac{\omega t}{2}} + \frac{\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\zeta}{(2N+1)\omega}\left(\frac{1}{\sin\frac{\omega t}{2}} - 1\right)\,.$$

Für $0 < t < T$ ist $1/\sin\frac{\omega t}{2} \geq 1$, also

$$0 \leq \frac{1}{\sin\frac{\omega t}{2}} - 1 < \frac{1}{\sin\frac{\omega t}{2}}\,,$$

und da der Cosinus nur Werte zwischen -1 und $+1$ annimmt, folgt, daß

$$\left|\sum_{\ell=1}^{N}\frac{\sin\ell\omega t}{\ell\omega} - f(t)\right| \leq \frac{2}{(2N+1)\omega\sin\frac{\omega t}{2}}$$

für alle t mit $0 < t < T$.

Für $N \to \infty$ geht die rechte Seite gegen null, also ist

$$S_f(t) = \lim_{N\to\infty}\sum_{\ell=1}^{N}\frac{\sin\ell\omega t}{\ell\omega} = f(t)$$

für alle t mit $0 < t < T$. Für $t = 0$ stehen links und rechts Nullen, so daß die Gleichung auch dort gilt, und da beide Seiten periodisch sind mit Periode T, gilt sie tatsächlich für alle $t \in \mathbb{R}$.

Auf abgeschlossenen Teilintervallen von $(0, T)$ ist die Konvergenz sogar gleichmäßig, denn im Intervall $[\varepsilon, T-\varepsilon]$ ist $\sin\frac{\omega t}{2} \geq \sin\frac{\omega\varepsilon}{2}$, d.h.

$$\left|\sum_{\ell=1}^{N}\frac{\sin\ell\omega t}{\ell\omega} - f(t)\right| \leq \frac{2}{(2N+1)\omega\sin\frac{\omega\varepsilon}{2}}$$

für alle $t \in [\varepsilon, T-\varepsilon]$.

Mit diesem Resultat können wir nun auch die Konvergenz der FOURIER-Reihe für Rechteckimpulse genauer untersuchen:

Für $0 < t < \frac{T}{2}$ liegt auch $\frac{T}{2} - t$ im Intervall $(0, T)$, d.h. mit der gerade betrachteten Funktion f für Sägezahnimpulse ist

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} + \frac{T}{4} - \frac{T}{4} + \frac{t}{2} = \frac{T}{4}\,.$$

Für $\frac{T}{2} < t < T$ liegt $\frac{T}{2} - t$ im Intervall $(-T, 0)$, d.h. $\frac{3T}{2} - t$ liegt in $(0, T)$ und

$$f(t)+f\left(\frac{T}{2} - t\right) = f(t)+f\left(\frac{3T}{2} - t\right) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} + \frac{T}{4} - \frac{3T}{4} + \frac{t}{2} = -\frac{T}{4}\,.$$

Für $t = 0$ sowie auch für $t = \frac{T}{2}$ ist $f(t) + f(\frac{T}{2} - t) = 0$, insgesamt ist also

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \begin{cases} \frac{T}{4} & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -\frac{T}{4} & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2} \end{cases}\,,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T. Somit beschreibt $f(t) + f(\frac{T}{2} - t)$ einen Rechteckimpuls.

Da $S_f(t) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right)$$

und

$$S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell\omega\left(\frac{T}{2} - t\right)}{\ell\omega} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\ell\omega T}{2} - \ell\omega t\right)}{\ell\omega}$$
$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(\ell\pi - \ell\omega t)}{\ell\omega}\,.$$

Für gerades ℓ ist

$$\sin(\ell\pi - x) = \sin(-x) = -\sin x$$

und für ungerades ℓ ist

$$\sin(\ell\pi - x) = \sin(\pi - x) = -\sin(x - \pi) = \sin x\,,$$

denn bei Verschiebung um π wird der $\sin x$ zu $-\sin x$. Damit folgt

$$S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega}$$

und

$$S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} + \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega}\,.$$

Für endliche Teilsummen heben sich bei dieser Addition einfach die Terme mit geraden Indizes weg, während die mit ungeradem Index verdoppelt werden, d.h.

$$\sum_{\ell=1}^{N} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} + \sum_{\ell=1}^{N} (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} = 2\sum_{\ell=1}^{N} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)\omega}\,.$$

Durch Grenzübergang $N \to \infty$ folgt

$$S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = 2\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)\omega}\,,$$

d.h.

$$2\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)\omega} = \begin{cases} \frac{T}{4} & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -\frac{T}{4} & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2} \end{cases}\,.$$

Multiplikation beider Seiten mit $4h/T$ führt wegen

$$\frac{8h}{T\omega} = \frac{8h}{2\pi} = \frac{4h}{\pi}$$

zur Formel

$$\frac{4h}{\pi}\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)} = \begin{cases} h & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2} \end{cases}\,.$$

Damit ist also auch die Konvergenz der FOURIER-Reihe der Rechteckschwingung geklärt. Als kleine Anwendung können wir den Wert $t = \frac{T}{4}$ einsetzen; für diesen ist

$$\sin(2\ell - 1)\omega\frac{T}{4} = \sin(2\ell - 1)\frac{\pi}{2} = (-1)^{\ell+1}\,,$$

d.h.

$$\frac{4h}{\pi}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell-1)} = h$$

und somit

$$\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell-1)} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots = \frac{\pi}{4}\,.$$

d) Das Gibbs-Phänomen

Wie in Abbildungen eins und zwei zu sehen ist, zeigen zumindest die dort dargestellten FOURIER-Polynome Überschwingungen an den Sprungstellen. Wir wollen uns davon überzeugen, daß diese auch bei FOURIER-Polynome mit beliebig vielen Summanden nicht verschwinden.

Beginnen wir mit den Rechteckschwingungen! Wir versuchen zunächst, die Summe

$$S_N(t) = \frac{4h}{\pi}\sum_{\ell=1}^{N}\frac{\sin(2\ell-1)\omega t}{(2\ell-1)}$$

in etwas kompakterer Form darzustellen. Wegen

$$\frac{\sin(2\ell-1)\omega t}{(2\ell-1)\omega} = \int_0^t \cos(2\ell-1)\omega\tau\,d\tau$$

ist

$$\frac{S_N(t)}{\omega} = \frac{4h}{\pi}\sum_{\ell=1}^{N}\int_0^t \cos(2\ell-1)\omega\tau\,d\tau = \frac{4h}{\pi}\int_0^t\sum_{\ell=1}^{N}\cos(2\ell-1)\omega\tau\,d\tau\,,$$

und diesen letzten Integranden können wir über seine komplexe Darstellung ausrechnen. Um den Nenner zwei zu eliminieren, berechnen wir den zweifachen Wert

$$2\sum_{\ell=1}^{N}\cos(2\ell-1)\omega\tau = \sum_{\ell=1}^{N}\left(e^{(2\ell-1)\cdot i\omega\tau}+e^{-(2\ell-1)\cdot i\omega\tau}\right)$$
$$= \sum_{\ell=-(N-1)}^{N} e^{(2\ell-1)\cdot i\omega\tau} = e^{(-2N+1)\cdot i\omega\tau}\sum_{\ell=0}^{2N-1}e^{2\ell\cdot i\omega\tau}\,.$$

Letztere Summe ist eine geometrische Reihe mit Quotient $e^{2i\omega\tau}$; nach der Summenformel hat sie den Wert

$$\frac{1-e^{4N\cdot i\omega\tau}}{1-e^{2i\omega\tau}}\,.$$

Die gesuchte Summe ist also

$$e^{-2N\cdot i\omega\tau}\,\frac{1-e^{4N\cdot i\omega\tau}}{1-e^{2i\omega\tau}} = \frac{e^{-2N\cdot i\omega\tau}}{e^{-i\omega\tau}}\,\frac{1-e^{4N\cdot i\omega\tau}}{1-e^{2i\omega\tau}}$$
$$= \frac{e^{-2N\cdot i\omega\tau}-e^{2N\cdot i\omega\tau}}{e^{-i\omega\tau}-e^{i\omega\tau}} = \frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin\omega\tau}$$

und

$$S_N = \frac{2h\omega}{\pi}\int_0^t\frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin\omega\tau}d\tau\,.$$

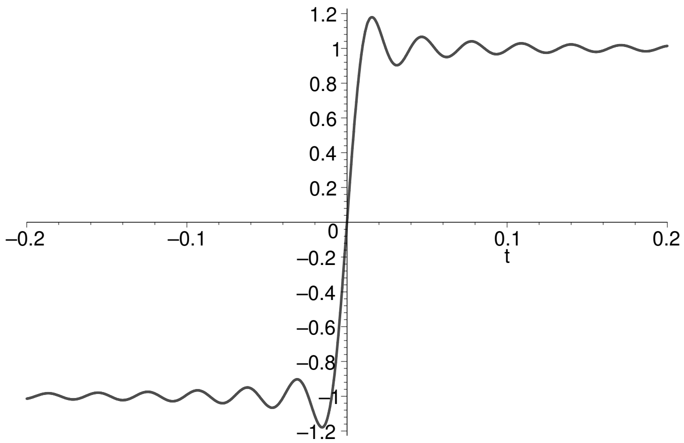


Abb. 3: Das GIBBSphänomen in Großaufnahme

Als nächstes suchen wir nach dem Betrag der Überschwingung. Abbildung drei zeigt diese in Großaufnahme für $S_{100}(t)$; wir wollen das Maximum unmittelbar nach der Sprungstelle bestimmen und das Integral dort auswerten.

Im Maximum verschwindet die Ableitung des Integrals, also der Integrand

$$\frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin\omega\tau}\,.$$

Bei der ersten positiven Nullstelle t_N ist $2N\omega t_N = \pi$ die erste positive Nullstelle des Sinus, d.h.

$$t_N = \frac{\pi}{2N\omega}\,.$$

Insbesondere rückt t_0 mit wachsendem N immer näher zur Null; je größer N wird, desto enger lokalisiert wird die Überschwingung.

Mit der Substitution $u = 2N\omega\tau$ wird

$$S_N(t_N) = \frac{2h\omega}{\pi}\int_0^{t_N}\frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin\omega\tau}\,d\tau = \frac{2h}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{2N\sin\frac{u}{2N}}\,du\,.$$

Für große Werte von N ist das Argument des Sinus im Nenner des Integranden sehr klein; wir machen also keinen großen Fehler, wenn wir den Sinus durch sein Argument annähern, und für $N\to\infty$ geht der Fehler gegen Null. Somit ist

$$\lim_{N\to\infty} S_N(t_N) = \lim_{N\to\infty}\frac{2h}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{2N\cdot\frac{u}{2N}}\,du = \frac{2h}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u}\,du\,.$$

Die Stammfunktion von $\frac{\sin u}{u}$ ist nicht in geschlossener Form durch trigonometrische Funktionen, Logarithmen, Exponentialfunktionen und ähnliches ausdrückbar, sie ist aber sehr wichtig und hat daher einen eigenen Namen:

Definition: Die Funktion

$$\mathrm{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du$$

heißt *Integralsinus* oder *sinus integralis.*

Der Integralsinus existiert für beliebige reelle Argumente t, denn die Nullstelle des Integranden bei $u = 0$ ist harmlos, da

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$$

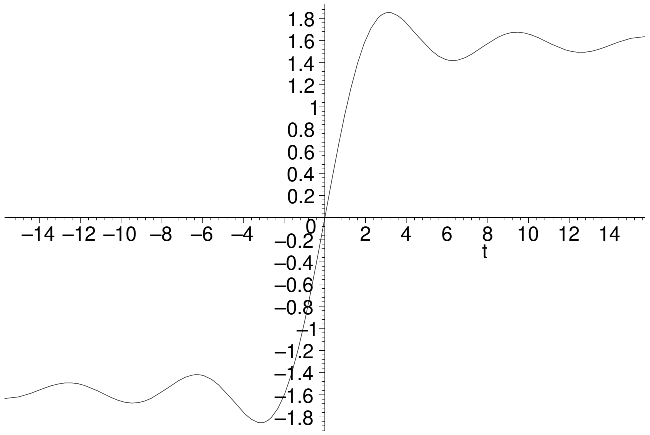


Abb. 4: Der Integralsinus

ist. Wie Abbildung vier zeigt, konvergiert er für $t\to\pm\infty$ relativ schnell gegen einen konstanten Wert, von dem eine genauere Untersuchung zeigt, daß es sich um $\pm\pi/2$ handelt.

Der uns interessierende Wert an der Stelle pi läßt sich nicht in einfacher Weise durch andere Konstanten ausdrücken und muß daher numerisch berechnet werden; man erhält

$$\mathrm{Si}(\pi)\approx 1{,}8519305198 \quad\text{und}\quad \frac{2h}{\pi}\,\mathrm{Si}(\pi)\approx 1{,}1789797445\cdot h\,.$$

Die FOURIER-Polynome überschwingen also auch für $N\to\infty$ den Funktionswert noch um knapp 18%.

Auch beim Sägezahn können wir die Überschwingung explizit berechnen: Aus Abschnitt *c3)* wissen wir bereits, daß hier

$$\sum_{\ell=1}^{N}\frac{\sin\ell\omega t}{\ell\omega} - f(t) = \int_{T/2}^{t}\frac{\sin\left(N+\frac12\right)\omega\tau}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}\,d\tau$$

ist. Auch die Ableitung dieser Funktion ist wieder der Integrand; für ihre erste positive Nullstelle t_N ist

$$\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega t_N = \pi\,, \quad \text{d.h.} \quad t_N = \frac{\pi}{\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega} = \frac{T}{2N+1}\,.$$

Mit der Substitution $u = \left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\tau$ wird

$$\int\limits_{T/2}^{t} \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\tau}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}\,d\tau = \int\limits_{\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi}^{\pi} \frac{\sin u}{(2N+1)\omega\sin\frac{u}{2N+1}}\,du\,.$$

Wieder können wir den Sinus im Nenner für große N durch sein Argument ersetzen und erhalten somit als Limes für $N\to\infty$

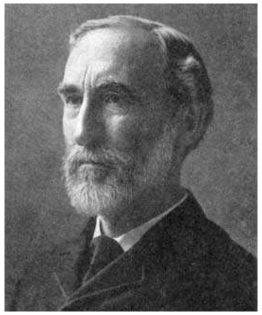
$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \int\limits_{\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi}^{\pi} \frac{\sin u}{\omega u}\,du &= \frac{1}{\omega}\left(\mathrm{Si}(\pi) - \lim_{t\to\infty}\mathrm{Si}(t)\right) = \frac{\mathrm{Si}(\pi)-\frac{\pi}{2}}{\omega}\\ &= \frac{T}{2\pi}\,\mathrm{Si}(\pi) - \frac{T}{4}\,.\end{aligned}$$

Dabei ist $T/4$ der Wert, der überschwungen wird, der Maximalwert des FOURIER-Polynoms geht also für $N\to\infty$ gegen $\frac{T}{2\pi}\,\mathrm{Si}(\pi)$. Dividiert man dies durch $\frac{T}{4}$, ergibt sich wieder der Quotient

$$\frac{T}{2\pi}\,\mathrm{Si}(\pi)\cdot\frac{4}{T} = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Si}(\pi)\,,$$

auch hier gibt es also wieder eine Überschwingung um knapp 18%.

Dies ist kein Zufall: Wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, tritt an *jeder* Unstetigkeitsstelle einer Funktion das GIBBS-Phänomen ein, wonach die FOURIER-Polynome den Sprung um diesen Faktor überschwingen.



JOSIAH WILLARD GIBBS (1839–1903) promovierte 1863 an der amerikanischen Yale-Universität mit einer Arbeit über Zahnradgetriebe; die erste amerikanische Dissertation auf dem Gebiet des Ingenieurwesens. Danach unterrichtete er in Yale Latein und Naturphilosophie, bis er 1866 nach Europa fuhr, wo er 1868/1869 in Heidelberg bei KIRCHHOFF und HELMHOLTZ studierte. 1871 wurde er in Yale Professor für mathematische Physik, 1873 publizierte er seine erste Arbeit, die sich, wie viele der folgenden, mit Thermodynamik befaßte. Sehr einflußreich waren auch seine Arbeiten über die elektromagnetische Theorie des Lichts und zur Vektoranalysis.

e) Das Hermitesche Produkt auf $\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ und die Besselsche Ungleichung

In §2*a)* hatten wir auf dem Vektorraum aller komplexer trigonometrischer Polynome ein HERMITEsches Skalarprodukt definiert durch die Festsetzung

$$(f,\,g) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)\overline{g(t)}\,dt\,.$$

Zumindest *definieren* können wir $(f,\,g)$ auch für beliebige Funktionen $f,g\in\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$. Sowohl die Linearitätseigenschaft als auch die HERMITEsche Symmetrie zeigt man genauso wir dort, und auch die Forderung

$$(f,\,f)\geq 0 \quad \text{für alle} \quad f\in\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$$

ist trivialerweise erfüllt. Probleme gibt es allerdings mit der positiven Definitheit: Für die Funktion f, die bei allen Vielfachen der Periode T den Wert eins annimmt und sonst überall verschwindet, ist $(f,\,f)=0$, aber die Funktion ist nicht gleich der Nullfunktion.

Wir sprechen daher nicht von einem HERMITEschen Skalarprodukt, sondern nur von einem HERMITEschen Produkt; wie sich zeigen wird, ist es auch ohne die Definitheitseigenschaft recht nützlich.

Als erste Anwendung beweisen wir die BESSELsche Ungleichung:

Lemma: Für die FOURIER-Koeffizienten $c_k = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-k\cdot i\omega t}\,dt$ einer Funktion $f \in L_T(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\overline{c_k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \le \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{f(t)}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt\,;$$

insbesondere konvergiert die linke Summe also.

Beweis: Die rechte Seite der Ungleichung ist gerade das HERMITEsche Produkt $(f,\ f)$, und auch die FOURIER-Koeffizienten lassen sich als Produkte

$$c_k = (f,\ e^{k\cdot i\omega t})$$

schreiben. Wir wollen noch einige weitere Produkte ausrechnen.

Zunächst definieren wir die Teilsumme

$$S_N(t) \underset{\text{def}}{=} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{k\cdot i\omega t}\,.$$

Dies ist ein trigonometrisches Polynom, und wir wissen daher schon aus §2*a)*, daß

$$(S_N,\ S_N) = \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2$$

ist.

Als nächstes betrachten wir das Produkt

$$(f - S_N,\ f - S_N) = (f,\ f) - (S_N,\ f) - (f,\ S_N) + (S_N,\ S_N)\,.$$

Auch wenn das HERMITEsche Produkt auf $L_T(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ nicht positiv definit ist, wissen wir doch, daß die linke (und damit auch die rechte) Seite zumindest nichtnegativ ist.

Wegen der Linearität des HERMITEschen Produkts im ersten Argument ist weiter

$$\begin{aligned}(S_N,\ f) &= \left(\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{k\cdot i\omega t},\ f\right) = \sum_{k=-N}^{N} c_k\left(e^{k\cdot i\omega t},\ f\right)\\ &= \sum_{k=-N}^{N} c_k\overline{(f,\ e^{k\cdot i\omega t})} = \sum_{k=-N}^{N} c_k\overline{\widehat{f}(k)} = \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2\\ &= (S_N,\ S_N)\,,\end{aligned}$$

und da dies eine reelle Zahl ist, folgt auch

$$(f,\ S_N) = \overline{(S_N,\ f)} = (S_N,\ f) = (S_N,\ S_N)\,.$$

Fassen wir alles zusammen, ist also

$$0 \le (f - S_N,\ f - S_N) = (f,\ f) - (S_N,\ S_N)$$

und damit

$$(S_N,\ S_N) \le (f, f) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Ausgeschrieben wird das zu

$$\sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 \le \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

und der Grenzübergang $N \to \infty$ führt zur gewünschten Ungleichung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \le \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt\,,$$

wie behauptet. ∎

FRIEDRICH WILHELM BESSEL (1784–1846) verließ die Schule schon im Alter von 14 Jahren und wurde Lehrling eines Handelshauses. Dessen Überseehandel veranlaßte ihn zur Beschäftigung mit Geographie, Spanisch und Englisch und schließlich (für die Navigation) mit Astronomie. Nachdem er 1804 die Bahn des HALLEYschen Kometen berechnet hatte, bekam er 1806 eine Stelle als Astronom eines privaten Observatoriums. Seine Beiträge zur Mathematik entstanden aus seinen astronomischen Berechnungen. 1809 wurde er zum Direktor des Königsberger Observatoriums und zum Professor der Astronomie ernannt.

Aufgrund der Beziehungen zwischen reellen und komplexen FOURIER-Reihen (für die genau dieselben Formeln gelten, wie sie in §2*a)* für trigonometrische Polynome hergeleitet wurden) folgt daß für die reelle FOURIER-Reihe einer reellwertigen Funktion gilt

$$|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) \le \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,dt\,.$$

Insbesondere konvergieren also auch die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell^2\,.$$

f) Harmonische Analyse als lineare Abbildung

Die BESSELsche Ungleichung zeigt, daß nicht alle Folgen reeller ode komplexer Zahlen als FOURIER-Koeffizienten eine stückweise stetigen Funktion auftreten können: Zumindest muß die Summe ihrer Betragsquadrate konvergieren.

Betrachten wir den Vektorraum

$$\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}) \underset{\text{def}}{=} \left\{ c\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c(k)|^2 < \infty \right\};$$

so muß also die Funktion $c\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ mit $c(k) = c_k$ in diesem Vektorraum liegen; wir haben somit eine Abbildung

$$\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})\,,$$

die einer Funktion $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ ihre FOURIER-Koeffizienten zuordnet.

Um den Zusammenhang zwischen Funktionen und Koeffizientenfolgen besser zu verdeutlichen, definieren wir für $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ die Funktion

$$\widehat{f}\colon \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \\ k \mapsto \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-k\cdot i\omega t}\,dt \end{cases};$$

$\widehat{f}(k)$ ist also gerade der k-te FOURIER-Koeffizient von f.

Lemma: Die Zuordnung $f \mapsto \widehat{f}$ definiert eine lineare Abbildung von $\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ nach $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$.

Der *Beweis* ist trivial wegen der Linearität der Integration. ■

Als nächstes definieren wir auf $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ ein HERMITEsches Skalarprodukt durch die Vorschrift

$$(c,\,d) \underset{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\overline{d_k}\,.$$

Wir müssen zeigen, daß dies erstens wohldefiniert ist, daß die Summe also überhaupt konvergiert, und daß es zweitens alle Forderungen an ein HERMITEsches Skalarprodukt erfüllt.

Da für zwei komplexe Zahlen z und w ist $\left(|z| - |w|\right)^2 \ge 0$, also

$$|zw| = |z\overline{w}| \le \frac{1}{2}\left(|z|^2 + |w|^2\right).$$

Für zwei Funktionen $c, d \in \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ ist daher für jede natürliche Zahl N

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=-N}^{N} c(k)\overline{d(k)}\right| &\le \sum_{k=-N}^{N} \left|c(k)\overline{d(k)}\right| \\ &\le \frac{1}{2}\left(\sum_{k=-N}^{N} |c(k)|^2 + \sum_{k=-N}^{N} |d(k)|^2\right).\end{aligned}$$

Nach Definition von $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ konvergiert die rechte Seite für $N \to \infty$, also auch die linke.

Das Nachrechnen der Forderungen an ein HERMITEsches Skalarprodukt ist nun einfach: Abgesehen von der Tatsache, daß die Summen nicht mehr endlich sind, geht alles ganz genauso wie beim HERMITEschen Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$.

Mit diesem Skalarprodukt ausgedrückt bekommt die BESSELsche Ungleichung die kompakte Form

$$\left(\widehat{f},\, \widehat{f}\right) \le (f,\, f) \quad \text{für alle} \quad f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\, \mathbb{C})\,.$$

§ 3: Konvergenz von Fourier-Reihen

Abgesehen von den beiden Beispielen der Rechteckschwingung und des Sägezahns wissen wir bislang noch von keiner FOURIER-Reihe, ob und gegebenenfalls wohin sie konvergiert. In diesem Paragraphen soll dies zumindest für stückweise differenzierbare Funktionen geklärt werden. Als zentral wird sich dabei eine neue Konstruktion herausstellen, die *Faltung zweier Funktionen.*

a) Faltungen

Definition: Für $f, g \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ bezeichnen wir die Funktion

$$f \star g(t) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

als (periodische) Faltung von f und g.

Anschaulich kann man sich die Faltung als eine Art Mittelung von g vorstellen mit einer Gewichtsfunktion f. Im zweidimensionalen (nichtperiodischen) Analogon kann man beispielsweise ein optisch defokusiertes Bild so beschreiben: Bei einer perfekten optischen Abbildung einer Ebene hängt jeder Bildpunkt von genau einem Punkt der Ebenen ab; ist das System aber defokusiert, so kommen auch noch Einflüsse

der Nachbarpunkte dazu, die umso größer sind, je näher die Punkte beieinanderliegen. Eine Helligkeitsverteilung $f(s,t)$ wird dann abgebildet auf

$$F(s,t) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{\left((s-\sigma)^2+(t-\tau)^2\right)/2a} f(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau\,,$$

wobei der Parameter a umso größer ist, je stärker das Bild defokusiert ist. Für kleines a ist der Effekt also eher ein Weichzeichnen als eine echte Unschärfe, und dieser Glättungseffekt ist ein allgemeines Charakteristikum von Faltungen:

Lemma: Für $f, g \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ ist $f \star g$ eine stetige Funktion.

(Man beachte, daß f und g beide nur als stückweise stetig vorausgesetzt sind!)

Beweis: Als stückweise stetige periodische Funktion ist g insbesondere beschränkt: Für jedes offene Intervall $(t_j,\, t_{j+1})$, in dem f stetig ist, müssen nach Definition der stückweisen Stetigkeit der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{\substack{t\to t_j\\ t>t_j}} g(t)$ und der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{\substack{t\to t_{j+1}\\ t<t_{j+1}}} g(t)$ existieren; damit kann die Einschränkung von g auf das offene Intervall $(t_j,\, t_{j+1})$ fortgesetzt werden zu einer stetigen Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[t_j,\, t_{j+1}]$ (die an den Intervallenden natürlich nicht mit g übereinstimmen muß). Damit hat der Betrag dieser Funktion ein endliches Maximum M_j, das auch eine Schranke für g im offenen Intervall $(t_j,\, t_{j+1})$ ist. Nimmt man nun als M das Maximum aller M_j sowie auch der Beträge $\left|g(t_j)\right|$ der Funktionswerte an den potentiellen Sprungstellen, so ist $|g(t)| \le M$ für alle $t \in [0,\, T]$ und damit auch für alle $t \in \mathbb{R}$.

Seien nun t_1 und t_2 Punkte aus $\mathbb{R}$; dann ist

$$\begin{aligned}\left|f\star g(t_1) - f\star g(t_2)\right| &\le \frac{1}{T}\int_0^T \left|f(t_1-\tau) - f(t_2-\tau)\right|\left|g(\tau)\right|\,d\tau\\ &\le \frac{M}{T}\int_0^T \left|f(t_1-\tau) - f(t_2-\tau)\right|\,d\tau\,.\end{aligned}$$

Das noch verbliebene Integral mißt die Fläche zwischen den Graphen von $f(t)$ und $f(t+t_2-t_1)$ über eine Periode von f; wegen der stückweisen Stetigkeit von f geht diese gegen null für $t_2 \to t_1$. ■

b) Die Fourier-Reihe einer Faltung

Die Nützlichkeit von Faltungen für FOURIER-Reihen ergibt sich aus folgender Formel:

$$\widehat{f \star g}(k) = \widehat{f}(k) \cdot \widehat{g}(k) \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{Z}\,;$$

die FOURIER-Koeffizienten der von $f \star g$ sind also gerade die Produkte der FOURIER-Koeffizienten von f mit denen von g.

Der *Beweis* erfolgt durch Nachrechnen: Der k-te FOURIER-Koeffizient c_k von $f \star g$ ist

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T}\int_0^T f \star g(t) e^{-k\cdot i\omega t}\,dt = \frac{1}{T^2}\int_0^T \left(\int_0^T f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\right) e^{-k\cdot i\omega t}\,dt \\ &= \frac{1}{T^2} \iint\limits_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le \tau\le T}} f(t-\tau)g(\tau)e^{-k\cdot i\omega t}\,d\tau\,dt \\ &= \frac{1}{T^2} \iint\limits_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le \tau\le T}} f(t-\tau)e^{-k\cdot i\omega(t-\tau)} \cdot g(\tau)e^{-k\cdot i\omega\tau}\,dt\,d\tau \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t-\tau)e^{-k\cdot i\omega(t-\tau)}\,dt\right) g(\tau)e^{-k\cdot i\omega\tau}\,d\tau\,. \end{aligned}$$

Der Inhalt der letzten Klammer kann mit Hilfe der Substitution $u = t-\tau$ im Integral berechnet werden:

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t-\tau)e^{-k\cdot i\omega(t-\tau)}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\tau}^{T-\tau} f(u)e^{-k\cdot i\omega u}\,du = \widehat{f}(k)\,,$$

denn wie wir uns schon überlegt haben, kommt es bei einer periodischen Funktion nicht darauf an, über welches Intervall der Länge T wir

integrieren. Somit ist

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T \widehat{f}(k)\cdot g(\tau)e^{-k\cdot i\omega\tau}\,d\tau = \widehat{f}(k)\cdot\widehat{g}(k)\,,$$

wie behauptet. ■

Die FOURIER-Reihe von $f \star g$ ist also

$$S_{f\star g}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_k e^{k\cdot i\omega t}\,,$$

wobei

$$S_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{k\cdot i\omega t} \quad \text{und} \quad S_g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{k\cdot i\omega t}$$

die FOURIER-Reihen von f und g sind.

Nach der BESSELschen Ungleichung konvergieren die Summen

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |d_k|^2\,;$$

außerdem ist für jedes k

$$|c_k d_k| \le \frac{1}{2}\left(|c_k|^2 + |d_k|^2\right)\,;$$

also konvergiert auch

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k d_k| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|c_k d_k e^{k\cdot i\omega t}\right|\,.$$

(Man beachte, daß $\left|e^{k\cdot i\omega t}\right| = 1$ ist für jede reelle Zahl t.) Damit haben wir gezeigt, daß die FOURIER-Reihe von $f \star g$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

Das hat eine wichtige Konsequenz:

Lemma: Konvergiert die FOURIER-Reihe einer Funktion h gleichmäßig gegen eine Funktion S_h, so ist S_h stetig und hat dieselben FOURIER-Koeffizienten wie h.