Kapitel 3
Harmonische Analyse
und Integraltransformationen

Dieselbe Note, von verschiedenen Musikinstrumenten gespielt, klingt zwar gleich hoch, hat aber jeweils ihren eigenen Klang: Wie wohl die meisten aus dem Physikunterricht wissen, hat der entstehende Ton zwar immer dieselbe Grundfrequenz, aber es ist die Verteilung der *Obertöne,* die jedem Instrument seinen eigenen Charakter gibt. Um einen Ton zu synthetisieren, muß man also die Amplitudenverteilung seiner Oberschwingungen kennen; erst dann kann man ihn als Überlagerung (elektrisch leicht erzeugbarer) reiner Schwingungen realisieren.

Auch bei der Übertragung und Verarbeitung elektrischer oder optischer Signale spielt deren Zerlegung in reine Schwingungen eine große Rolle, da sowohl das Verhalten von Kupfer- oder Glasfaserkabeln als auch das praktisch aller Schaltkreise stark von der Frequenz abhängt.

In diesem Kapitel geht es um die Mathematik hinter der Zerlegung eines Signals in seine periodischen Bestandteile; wie sich zeigen wird ist diese fast identisch mit der seiner Synthese aus diesen Bestandteilen.

§1: Komplexe Integrale und Hermitesche Vektorräume

a) Komplexe Darstellung trigonometrischer Funktionen

Reine Schwingungen lassen sich durch Funktionen der Art

$$f(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t = \alpha\cos(\omega t + \beta)$$

beschreiben; dabei wird ω als *Kreisfrequenz* und

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

als *Periode* der Funktion bezeichnet. Offensichtlich ist T die kleinste positive reelle Zahl, für die gilt

$$f(t+T) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}\,,$$

denn für $\omega = 1$ hat $T = 2\pi$ sowohl beim Sinus als auch beim Cosinus diese Eigenschaft.

Wer eine Formelsammlung aufschlägt, findet dort eine Fülle von Formeln für trigonometrische Funktionen von Summen, mehrfachen Argumenten und so weiter, die sich leider größtenteils nur schwer merken lassen: Schon die Formel

$$\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$$

ist deutlich schwieriger als etwa die Formel

$$e^{3t} = \left(e^t\right)^3,$$

wobei letztere auch dann noch einfach bleibt, wenn die Drei beispielsweise durch eine Zehn ersetzt wird – sehr im Gegensatz zu

$$\cos 10t = 512\cos^{10} t - 1280\cos^8 t + 1120\cos^6 t - 400\cos^4 t + 50\cos^2 - 1\,.$$

Der große Vorteil der komplexen Darstellung der trigonometrischen Funktionen besteht darin, daß man damit komplizierte Formeln wie diese aus so einfachen Formeln wie $e^{10t} = \left(e^t\right)^{10}$ herleiten kann.

Der Schlüssel zu dieser komplexen Darstellung ist die TAYLOR-Reihe

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\,,$$

die bekanntlich auch für alle komplexen Werte von z konvergiert und somit als Definition einer komplexen Exponentialfunktion dienen kann. Setzt man hierin speziell $z = it$ mit der imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$, so kann man die Summe wegen ihrer gleichmäßigen Konvergenz auf allen abgeschlossenen Intervallen aufspalten in eine Summation über gerade Indizes $k = 2\ell$ und ungerade Indizes $k = 2\ell + 1$; dies führt auf

$$\begin{aligned} e^{it} &= \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{t^k}{k!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{2\ell} \frac{t^{2\ell}}{(2\ell)!} + \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{2\ell+1} \frac{t^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{t^{2\ell}}{(2\ell)!} + i \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{t^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} . \end{aligned}$$

Vergleich mit den beiden TAYLOR-Reihen

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{t^{2\ell}}{(2\ell)!}$$

und

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t5}{5!} - \cdots = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{t^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!}$$

beweist die EULERsche Formel

$$e^{it} = \cos t + i \sin t .$$

Insbesondere sind $\cos t$ und $\sin t$ also Realteil und Imaginärteil von e^{it}:

$$\cos t = \mathfrak{Re}\, e^{it} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \text{und} \quad \sin t = \mathfrak{Im}\, e^{it} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} .$$

Damit läßt sich nun einfach die obige Formel für $\cos 3t$ herleiten:

$$\begin{aligned} \cos 3t &= \mathfrak{Re}\, e^{3it} = \mathfrak{Re}\big(e^{it}\big)^3 = \mathfrak{Re}\big(\cos t + i \sin t\big)^3 \\ &= \mathfrak{Re}\big(\cos^3 t + 3i \cos^2 t \sin t - 3 \cos t \sin^2 t - i \sin^3 t\big) \\ &= \cos^3 t - 3 \cos t \sin^2 t = \cos^3 t - 3 \cos t\, (1 - \cos^2 t) \\ &= 4 \cos^3 t - 3 \cos t , \end{aligned}$$

und mit etwas größerem Rechenaufwand läßt sich auch die Formel für $\cos 10t$ auf diese Weise herleiten.

(Mit etwas mehr Übung hätte man hier die Imaginärteile beim Ausmultiplizieren der dritten Potenz natürlich gleich gar nicht erst hingeschrieben.)

b) Integrale komplexwertiger Funktionen

Auch für die Berechnung von Integralen mit trigonometrischen Funktionen ist der Umweg über das Komplexe oft eine Erleichterung. Bevor wir ihn gehen können, müssen wir aber erst wissen, wie Integrale über komplexwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen definiert sind.

Eine der wichtigsten Eigenschaften der reellen Integration ist ihre Linearität, die es gestattet, die Reihenfolge von Integration und Summation zu vertauschen und konstante Faktoren aus Integralen herauszuziehen. Auf diese Eigenschaft wollen wir auch im Komplexen nicht verzichten, und damit gibt es nur eine mögliche Definition:

Definition: $f\colon D \to \mathbb{C}$ sei eine Funktion auf $D \subseteq \mathbb{R}$ und $u, v\colon D \to \mathbb{R}$ seien so definiert, daß

$$f(t) = u(t) + iv(t) \quad \text{für alle } t \in D .$$

Dann ist für $[a, b] \subseteq D$

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b u(t)\, dt + i \int_a^b v(t)\, dt$$

und wir bezeichnen

$$F(t) = \int f(t)\, dt = \int u(t)\, dt + i \int v(t)\, dt$$

als eine *Stammfunktion* von f.

Man beachte, daß diese Stammfunktion nur bis auf eine additive *komplexe* Konstante bestimmt ist: Deren Realteil ist die Integrationskonstante der Stammfunktion von u, ihr Imaginärteil die zu v.

Als Beispiel berechnen wir

$$\begin{aligned} \int e^{i\omega t}\, dt &= \int (\cos \omega t + i \sin \omega t)\, dt = \int \cos \omega t\, dt + i \int \sin \omega t\, dt \\ &= \frac{1}{\omega}\big(\sin \omega t - i \cos \omega t\big) + C = -\frac{i}{\omega}\big(\cos \omega t + i \sin \omega t\big) + C \\ &= \frac{1}{i\omega} e^{i\omega t} + C , \end{aligned}$$

genau wie man es vom Reellen her gewohnt ist. Allgemein ist für jede komplexe Zahl λ

$$\int e^{\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda t} + C\,,$$

denn für $\lambda = r + i\omega$ ist

$$e^{\lambda t} = e^{rt}e^{i\omega t} = e^{rt}(\cos\omega t + i\sin\omega t)\,,$$

und differenziert man in

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}e^{\lambda t} &= \frac{1}{r+i\omega}e^{\lambda t} = \frac{r-i\omega}{r^2+\omega^2}e^{rt}(\cos\omega t + i\sin\omega t)\\ &= \frac{e^{rt}}{r^2+\omega^2}\big(r\cos\omega t + \omega\sin\omega t\big) + \frac{ie^{rt}}{r^2+\omega^2}(r\sin\omega t - \omega\cos\omega t)\end{aligned}$$

Realteil und Imaginärteil beide nach t, erhält man genau dies. (Man kann das Ergebnis natürlich auch mit partieller Integration herleiten.)

c) Die Orthogonalitätsrelationen für trigonometrische Funktionen

Mit etwas Erfahrung im Umgang mit trigonometrischen Funktionen sieht wohl hoffentlich jeder ziemlich schnell, daß

$$\int_0^{2\pi} \cos 4t \sin 3t\,dt = 0$$

ist; was aber ist

$$\int_0^{2\pi} \cos 3t \cos 5t\,dt\ ?$$

Der Umweg über das Komplexe gibt auch hier wieder eine schnelle Antwort: Für beliebige ganze Zahlen $k,\ell \in \mathbb{Z}$ und eine positive reelle

Zahl T ist für $\omega = 2\pi/T$

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{k\cdot i\omega t}e^{\ell\cdot i\omega t}\,dt &= \int_0^T e^{(k+\ell)\cdot i\omega t}\,dt\\ &= \int_0^T \cos(k+\ell)\omega t\,dt + i\int_0^T \sin(k+\ell)\omega t\,dt = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq -\ell\\ T & \text{für } k = -\ell\,,\end{cases}\end{aligned}$$

denn für $k \neq -\ell$ wird eine reine Schwingung über eine oder mehrere volle Perioden integriert.

Gleichzeitig ist

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{k\cdot i\omega t}e^{\ell\cdot i\omega t}\,dt &= \int_0^T \big(\cos k\omega t + i\sin k\omega t\big)\big(\cos \ell\omega t + i\sin \ell\omega t\big)\,dt\\ &= \int_0^T \big(\cos k\omega t\cos\ell\omega t - \sin k\omega t\sin\ell\omega t\big)\,dt\\ &\quad + i\int_0^T \big(\cos k\omega t\sin\ell\omega t + \sin k\omega t\cos\ell\omega t\big)\,dt\,.\end{aligned}$$

Da zwei komplexe Zahlen genau dann gleich sind, wenn sowohl ihre Realteile als auch ihre Imaginärteile übereinstimmen, ist daher

$$\int_0^T \big(\cos k\omega t\cos\ell\omega t - \sin k\omega t\sin\ell\omega t\big)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq -\ell\\ T & \text{für } k = -\ell\,,\end{cases} \qquad (1)$$

und

$$\int_0^T \big(\cos k\omega t\sin\ell\omega t + \sin k\omega t\cos\ell\omega t\big)\,dt = 0\,. \qquad (2)$$

Ersetzen wir hierin k durch $-k$ folgt, daß auch gilt

$$\int_0^T \big(\cos k\omega t\cos\ell\omega t + \sin k\omega t\sin\ell\omega t\big)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell\\ T & \text{für } k = \ell\,,\end{cases} \qquad (3)$$

und
$$\int_0^T \big(\cos k\omega t \sin \ell\omega t - \sin k\omega t \cos \ell\omega t\big)\, dt = 0\,, \tag{4}$$
denn Cosinus ist eine gerade und Sinus eine ungerade Funktion. Addition von (1) und (3) führt auf die Formel
$$\int_0^T \big(\cos k\omega t \cos \ell\omega t\big)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \pm\ell \\ T/2 & \text{für } k = \pm\ell \neq 0 \\ T & \text{für } k = \ell = 0\,, \end{cases}$$
Subtraktion auf
$$\int_0^T \big(\sin k\omega t \sin \ell\omega t\big)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \pm\ell \\ T/2 & \text{für } k = \pm\ell \neq 0 \\ 0 & \text{für } k = \ell = 0\,. \end{cases}$$
Entsprechend führt die Addition von (2) und (4) auf
$$\int_0^T \big(\cos k\omega t \sin \ell\omega t\big)\, dt = 0\,.$$

d) Hermitesche Vektorräume

Die gerade bewiesenen Formeln erinnern an Kapitel 2, §1*a),* wo wir mit ähnlichen Integralen Skalarprodukte auf Räumen stetiger Funktionen definiert hatten. In der Tat wird sich die Interpretation solcher Räume als EUKLIDische Vektorräume als sehr nützlich für die harmonische Analyse erweisen; allerdings müssen wir die Begriffe so verallgemeinern, daß sie auch im Komplexen brauchbar sind.

Die unmittelbare Verallgemeinerung des Skalarprodukts des $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{C}^n$ ist nicht sonderlich sinnvoll: Dann hätten wir nämlich zum Beispiel
$$\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = 1 \cot 1 + i \cdot i = 0\,.$$
Solche Vektoren mit Quadrat Null sind zwar in einigen Anwendungen (wie etwa der speziellen Relativitätstheorie) durchaus sinnvoll, meist möchte man aber das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst als

Quadrat seiner Länge interpretieren, und die sollte für alle Vektoren außer dem Nullvektor positiv sein.

Wir haben bereits jeder komplexen Zahl ungleich Null eine positive reelle Zahl zugeordnet, nämlich ihren Betrag
$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}\,.$$
Entsprechend können wir zwei komplexen Vektoren
$$\vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}$$
aus $\mathbb{C}^n$ das Produkt
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{\ell=1}^n v_\ell \overline{w_\ell}$$
zuordnen. Auch hier ist offensichtlich $\vec{v} \cdot \vec{v}$ für jeden Vektor außer dem Nullvektor eine positive reelle Zahl, denn wir addieren ja die Betragsquadrate der Komponenten des Vektors.

Dieses Produkt erfüllt nun allerdings nicht mehr die Forderungen aus der Definition eines Skalarprodukts: Es ist zwar noch linear im ersten Argument, nicht mehr aber im zweiten, denn schon bei Multiplikation des zweiten Vektors mit einer komplexen Zahl $\lambda \notin \mathbb{R}$ ist
$$\vec{v} \cdot (\lambda\vec{w}) = \sum_{\ell=1}^n v_\ell \cdot \overline{\lambda w_\ell} = \overline{\lambda} \cdot \sum_{\ell=1}^n v_\ell \overline{w_\ell} = \overline{\lambda} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w}) \neq \lambda \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})\,.$$
Bezüglich der Addition gibt es keine Probleme; somit wird die Linearitätsregel für das zweite Argument zu
$$\vec{u} \cdot (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \overline{\lambda} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) + \overline{\mu} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{w})\,.$$
Die Symmetriebedingung ist ebenfalls verletzt, denn schon für zwei komplexe Zahlen z und w ist das Produkt $z\overline{w} = \overline{w}z = \overline{w\overline{z}}$ im allgemeinen verschieden von $w\overline{z}$, und entsprechend ist auch für zwei Vektoren
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \overline{\vec{w} \cdot \vec{v}}\,.$$

Der Begriff des HERMITEschen Vektorraums formalisiert diese Eigenschaften:

Definition: Ein HERMITEscher Vektorraum ist ein Paar $(V, \cdot)$ bestehend aus einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V und einer Abbildung

$$\cdot : V \times V \to \mathbb{C}; \quad (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \cdot \vec{w}$$

mit folgenden Eigenschaften:
a) $\cdot$ ist linear im ersten Argument, d.h.

$$(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{w}) + \mu(\vec{v} \cdot \vec{w})$$

für alle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
b) $\cdot$ ist HERMITEsch symmetrisch, d.h. $\vec{v} \cdot \vec{w} = \overline{\vec{w} \cdot \vec{v}}$ für alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$.
c) $\cdot$ ist positiv definit, d.h. $\vec{v} \cdot \vec{v}$ ist eine positive reelle Zahl für alle Vektoren $\vec{v} \neq \vec{0}$ aus V.

Die bilineare Abbildung $\cdot$ heißt HERMITE*sches Skalarprodukt;* auch hier werden wir den Malpunkt nicht immer hinschreiben und bei Verwechslungsgefahr mit anderen Produkten auch gelegentlich $(\vec{v}, \vec{w})$ anstelle von $\vec{v} \cdot \vec{w}$ schreiben.

CHARLES HERMITE (1822–1901) war einer der bedeutendsten Mathematiker des neunzehnten Jahrhunderts. Zu seinen Resultaten zählen eine Vereinfachung des ABELschen Beweises, daß Gleichungen fünften Grades im allgemeinen nicht durch Wurzelausdrücke gelöst werden können, die explizite Lösung solcher Gleichungen durch elliptische Funktionen, der Nachweis, daß e eine transzendete Zahl ist, also keiner algebraischen Gleichung über $\mathbb{Q}$ genügt, eine Interpolationsformel und vieles mehr. HERMITE galt als ein sehr guter akademischer Lehrer; er unterrichtete an der École Polytechnique, dem Collège de France, der École Normale Supérieure und der Sorbonne.

Durch Kombination der Eigenschaften *a)* und *b)* kann man leicht ausrechnen, was anstelle der Linearität für das zweite Argument gilt: Genau wie im obigen Beispiel ist

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) &= \overline{(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) \cdot \vec{u}} = \overline{\lambda(\vec{v} \cdot \vec{u}) + \mu(\vec{w} \cdot \vec{u})} \\ &= \overline{\lambda}\,\overline{(\vec{v} \cdot \vec{u})} + \overline{\mu}\,\overline{(\vec{w} \cdot \vec{u})} = \overline{\lambda}\,(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \overline{\mu}\,(\vec{u} \cdot \vec{w})\,.\end{aligned}$$

Diese Eigenschaft, zusammen mit der Linearität im ersten Argument, bezeichnet man gelegentlich als *Sesquilinearität,* d.h. „anderthalbfache Linearität“, im Gegensatz zur echten Linearität in zwei Argumenten, der *Bilinearität.*

Typisches Beispiel eines HERMITEschen Vektorraums ist natürlich der $\mathbb{C}^n$ mit dem eingangs definierten Produkt; was uns hier in erster Linie interessiert sind jedoch HERMITEsche Vektorräume von komplexwertigen Funktionen. Mit diesen werden wir uns ab dem nächsten Abschnitt genauer beschäftigen.

Auch in HERMITEschen Vektorräumen werden wir $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ gelegentlich als *Länge* des Vektors $\vec{v}$ bezeichnen; auf die Definition von Winkeln hingegen wollen wir verzichten, da die Übernahme der entsprechenden Definition für EUKLIDische Vektorräume hier auf geometrisch nicht sinnvolle komplexe Winkel führen würde.

Ansonsten können und werden wir EUKLIDische und HERMITEsche Vektorräume im folgenden gleichzeitig behandeln: Ersetzt man in der Definition eines HERMITEschen Vektorraums überall $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$, so erhält man einen EUKLIDischen Vektorraum. Zwar stehen noch an vielen Stellen die Querstriche für komplexe Konjugation, aber da sich eine reelle Zahl unter komplexer Konjugation nicht ändert, sind die Konjugationsstriche nur überflüssig, nicht schädlich.

Als erstes Beispiel wollen wir die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung für EUKLIDische und HERMITEsche Vektorräume in einer Form beweisen, die auch für EUKLIDische Vektorräume eine leichte Verallgemeinerung der bereits kekannten Ungleichung ist:

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: Für $k = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sei auf dem k-Vektorraum V eine Abbildung $\cdot : V \times V \to k;\ (f, g) \mapsto f \cdot g$ gegeben mit den Eigenschaften
a) $(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{w}) + \mu(\vec{v} \cdot \vec{w})$
b) $\vec{w} \cdot \vec{v} = \overline{\vec{v} \cdot \vec{w}}$
c) $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$ für alle $\vec{v} \in V$.
Dann ist für alle Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in V$

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \ .$$

(Man beachte, daß hier nicht gefordert wird, daß $\vec{v} \cdot \vec{v} > 0$ für $\vec{v} \neq \vec{0}$.)

Der *Beweis* beruht auf folgendem Trick: Wegen *c)* ist für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}(\lambda\vec{v}+\mu\vec{w})\cdot(\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}) &= \lambda\overline{\lambda}\,\vec{v}\cdot\vec{v}+\lambda\overline{\mu}\,\vec{v}\cdot\vec{w}+\mu\overline{\lambda}\,\vec{w}\cdot\vec{v}+\mu\overline{\mu}\,\vec{w}\cdot\vec{w}\\ &= \lambda\overline{\lambda}\,\vec{v}\cdot\vec{v}+\lambda\overline{\mu}\,\vec{v}\cdot\vec{w}+\overline{\lambda}\mu\,\overline{\vec{v}\cdot\vec{w}}+\mu\overline{\mu}\,\vec{w}\cdot\vec{w}\end{aligned}$$

stets größer oder gleich null. Speziell für $\lambda = (\vec{w}\cdot\vec{w}) \in \mathbb{R}$ und $\mu = -(\vec{v}\cdot\vec{w})$ erhalten wir

$$(\vec{w}\cdot\vec{w})^2(\vec{v}\cdot\vec{v}) - 2(\vec{w}\cdot\vec{w})(\overline{\vec{v}\cdot\vec{w}})(\vec{v}\cdot\vec{w}) + (\vec{v}\cdot\vec{w})(\overline{\vec{v}\cdot\vec{w}})(\vec{w}\cdot\vec{w}) \geq 0\,,$$

also

$$(\vec{w}\cdot\vec{w})\big((\vec{w}\cdot\vec{w})(\vec{v}\cdot\vec{v}) - |\vec{v}\cdot\vec{w}|^2\big) \geq 0\,.$$

Ist hier $\vec{w}\cdot\vec{w} \neq 0$, können wir durch diese Zahl dividieren und die Behauptung ist bewiesen. Andernfalls können wir, falls wenigstens $\vec{v}\cdot\vec{v}$ nicht null ist, im obigen Argument die Rollen von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ vertauschen und damit die Behauptung beweisen.

Wenn schließlich $\vec{v}\cdot\vec{v}$ und $\vec{w}\cdot\vec{w}$ beide null sind, folgt aus

$$(\vec{v}\pm\vec{w})\cdot(\vec{v}\pm\vec{w}) = \pm(\vec{v}\cdot\vec{w}+\overline{\vec{v}\cdot\vec{w}}) = \pm 2\,\mathfrak{Re}(\vec{v}\vec{w}) \geq 0\,,$$

daß der Realteil von $\vec{v}\cdot\vec{w}$ verschwindet, und genauso verschwindet auch der Imaginärteil, da $(i\vec{v}\pm\vec{w})\cdot(i\vec{v}\pm\vec{w}) = \pm 2\,\mathfrak{Im}(\vec{v}\cdot\vec{w}) \geq 0$ ist. Somit ist $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$, und die Ungleichung gilt auch in diesem Fall. ∎

e) Orthonormalbasen Hermitescher Vektorräume

Genau wie in EUKLIDischen Vektorräumen bezeichnen wir auch im HERMITEschen Fall zwei Vektoren als *orthogonal,* wenn ihr (HERMITEsches) Skalarprodukt verschwindet. Mit diesem Begriff kann die Definition von Orthogonal- und Orthonormalbasen wörtlich von EUKLIDischen Fall übernommen werden:

Definition: *a)* Eine Basis $\mathcal{B}$ eines EUKLIDischen oder HERMITEschen Vektorraums heißt *Orthogonalbasis,* wenn jedes Element von $\mathcal{B}$ orthogonal zu allen übrigen ist.
b) Eine Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ heißt *Orthonormalbasis,* wenn zusätzlich für jeden Vektor $\vec{b} \in \mathcal{B}$ gilt: $\vec{b}\cdot\vec{b} = 1$.

Damit ist klar, daß auch im Komplexen die Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis des n-dimensionalen Vektorraums $\mathbb{C}^n$ bilden.

Genau wie im EUKLIDischen Fall gilt, daß tatsächlich *jeder* HERMITEsche Vektorraum eine Orthonormalbasis hat; für den Beweis werden wir uns allerdings, wie immer, wenn von Basen die Rede ist, zur Vermeidung von logischen Schwierigkeiten auf den endlichdimensionalen Fall beschränken:

Satz: Jeder endlichdimensionale HERMITEsche Vektorraum V hat eine Orthonormalbasis.

Der *Beweis* geht fast genauso wie im EUKLIDischen Fall: Wir wissen bereits, daß V *irgendeine* Basis $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ hat; daraus konstruieren wir zunächst eine *Orthogonalbasis* nach dem GRAM-SCHMIDTschen Orthogonalisierungsverfahren. Dieses besteht beklanntlich aus n Schritten, wobei im r-ten Schritt eine Orthogonalbasis $\{vc_1, \ldots, \vec{c}_r\}$ von $[\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r]$ konstruiert wird.

Der erste Schritt ist der einfachste: Da es noch keine Orthogonalitätsbedingung für $\vec{c}_1$ gibt, können wir einfach $\vec{c}_1 = \vec{b}_1$ setzen.

Nachdem wir $r \geq 1$ Schritte durchgeführt haben, haben wir r linear unabhängige Vektoren $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_r$ mit $\vec{c}_i\cdot\vec{c}_j = 0$ für $i \neq j$ aus dem von $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r$ aufgespannten Untervektorraum. Ist $r = n$, haben wir eine Orthogonalbasis; andernfalls muß ein auf den bisher konstruierten $\vec{c}_i$ senkrecht stehender Vektor $\vec{c}_{r+1}$ gefunden werden, der zusammen mit diesen den von $\vec{b}_1$ bis $\vec{b}_{r+1}$ erzeugten Untervektorraum erzeugt.

Da $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_r$ und $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r$ denselben Untervektorraum erzeugen, gilt dasselbe für $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_r, \vec{b}_{r+1}$ und $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{r+1}$; das Problem ist, daß $\vec{b}_{r+1}$ im allgemeinen nicht orthogonal zu den $\vec{c}_i$ sein wird. Wir dürfen $\vec{b}_{r+1}$

aber abändern durch einen beliebigen Vektor aus dem von $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_r$ aufgespannten Untervektorraum; also setzen wir

$$\vec{c}_{r+1} = \vec{b}_{r+1} + \lambda_1 \vec{c}_1 + \cdots + \lambda_r \vec{c}_r$$

und versuchen, die λ_i so zu bestimmen, daß dieser Vektor orthogonal zu $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_r$ wird.

Wegen der Orthogonalität der $\vec{c}_i$ ist

$$\vec{c}_{r+1} \cdot \vec{c}_i = \vec{b}_{r+1} \cdot \vec{c}_i + \sum_{j=1} \lambda_j (\vec{c}_j \cdot \vec{c}_i) = \vec{b}_{r+1} \cdot \vec{c}_i + \lambda_i (\vec{c}_i \cdot \vec{c}_i)\,;$$

setzen wir daher $\lambda_i = -\dfrac{\vec{b}_{r+1} \cdot \vec{c}_i}{\vec{c}_i \cdot \vec{c}_i}$, so ist $\vec{v} \cdot \vec{c}_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, r$.

Nach dem n-ten Schritt haben wir eine Orthogonalbasis $\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n\}$ von V konstruiert. Daraus wird die gewünschte *Orthonormalbasis* $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, wenn wir jeden Vektor durch seine Länge dividieren, d.h.

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{c}_i}{\|\vec{c}_i\|}\,.$$

■

Um auch den Umgang mit HERMITEschen Skalarprodukten und das Rechnen mit komplexen Zahlen zu üben, betrachten wir als Beispiel den von

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1+2i \\ -2+i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1+2i \\ -i \\ -4-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$$

aufgespannten Untervektorraum von $\mathbb{C}^4$.

Wie üblich können wir bei der Anwendung des GRAM-SCHMIDTschen Orthogonalisierungsverfahrens $\vec{c}_1 = \vec{b}_1$ setzen; im zweiten Schritt suchen wir einen Vektor $\vec{c}_2 = \vec{b}_2 + \lambda_1 \vec{c}_1$ mit der Eigenschaft, daß

$$\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1 = (\vec{b}_2 + \lambda_1 \vec{c}_1) \cdot \vec{c}_1 = \vec{b}_2 \cdot \vec{c}_1 + \lambda_1 (\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1) = 0$$

ist. Bis hierher geht alles genauso wie im reellen Fall, allerdings war es dort völlig irrelevant, ob wir $\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1 = 0$ oder $\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 = 0$ fordern wollten.

Hier im Komplexen ist das zwar grundsätzlich auch noch irrelevant, denn wegen der Eigenschaft

$$\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1 = \overline{\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2}$$

verschwindet das eine Produkt genau dann, wenn auch das andere verschwindet. Rechnerisch gibt es allerdings einen Unterschied, denn

$$\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 = \vec{c}_1 \cdot (\vec{b}_2 + \lambda_1 \vec{c}_1) = \vec{c}_1 \cdot \vec{b}_2 + \overline{\lambda_1} (\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1) = 0$$

bestimmt $\overline{\lambda_1}$, nicht λ_1. Falls man dies beachtet, erhält man natürlich bei beiden Ansätzen denselben Wert von λ_1.

Um die komplexe Konjugation zu vermeiden, wählen wir hier den ersten Weg. Dazu benötigen wir die HERMITEschen Skalarprodukte

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1+2i \\ -2+i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}\,.$$

Bei deren Berechnung darf man auf keinen Fall vergessen, die Einträge des jeweils zweiten Vektors komplex zu konjugieren, d.h.

$$\begin{aligned} \vec{b}_2 \cdot \vec{c}_1 &= (1+2i) \cdot \overline{1} + (-2+i) \cdot \overline{i} + (-i) \cdot (\overline{-i}) + (-1) \cdot (\overline{-1}) \\ &= (1+2i) \cdot 1 + (-2+i) \cdot (-i) + (-i) \cdot i + (-1) \cdot (-1)\,. \\ &= (1+2i) + (1+2i) + 1 + 1 = 4 + 4i \end{aligned}$$

Entsprechend ist

$$\begin{aligned} \vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1 &= 1 \cdot \overline{1} + i \cdot \overline{i} + (-i) \cdot (\overline{-i}) + (-1) \cdot (\overline{-1}) \\ &= 1 \cdot 1 + i \cdot (-i) + (-i) \cdot i + (-1) \cdot (-1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4\,, \end{aligned}$$

wobei das allerdings auch mit weniger Mühe einzusehen ist: Da für einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ mit Komponenten $v_1, \dots, v_n$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \overline{v_i} = \sum_{i=1}^{n} |v_i|^2$$

ist, hätte es genügt, einfach die Betragsquadrate der vier Einträge aufzusummieren, wobei im vorliegenden Fall trivial ist, daß alle diese Beträge gleich eins sind.

Einsetzen der beiden Skalarprodukte in die Gleichung für λ_1 zeigt, daß

$$(4+4i)+4\lambda_1 = 0 \quad \text{und damit} \quad \lambda_1 = \frac{-4-4i}{4} = -1-i$$

sein muß. Somit ist

$$\vec{c}_2 = \vec{b}_2 + \lambda_1\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1+2i \\ -2+i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} - (1+i)\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2i \\ -2+i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+i \\ -1+i \\ 1-i \\ -1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Im dritten Schritt muß ein Vektor

$$\vec{c}_3 = \vec{b}_3 + \mu_1\vec{c}_1 + \mu_2\vec{c}_2$$

berechnet werden mit

$$\vec{c}_3 \cdot \vec{c}_1 = \vec{c}_3 \cdot \vec{c}_2 = 0\,.$$

Hier ist

$$\vec{c}_3 \cdot \vec{c}_1 = \vec{b}_3 \cdot \vec{c}_1 + \mu_1\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1 + \mu_2\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1 = \vec{b}_3 \cdot \vec{c}_1 + \mu_1\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1\,,$$

da der zweite Schritt sicherstellte, daß $\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1 = 0$ ist. Das HERMITEsche Skalarprodukt $\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1 = 4$ kennen wir bereits, und eine kurze Rechung zeigt, daß

$$\vec{b}_3 \cdot \vec{c}_1 = (1+2i) + (-1) + (1-4i) + (-1-2i) = -4i$$

ist. Also folgt

$$\mu_1 = -\frac{\vec{b}_3 \cdot \vec{c}_1}{\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1} = -\frac{-4i}{4} = i$$

und entsprechend folgt auch

$$\mu_2 = -\frac{\vec{b}_3 \cdot \vec{c}_2}{\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_2} = -\frac{8}{4} = -2\,,$$

wobei diesesmal die genaue Berechnung der beiden HERMITEschen Skalarprodukte dem Leser als Übungsaufgabe überlassen sei. Der dritte Basisvektor $\vec{c}_3 = \vec{b}_3 + i\vec{c}_1 - 2\vec{c}_2$ ist daher gleich

$$\begin{pmatrix} 1+2i \\ -i \\ -4-i \\ 1+2i \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ -1-i \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

Damit ist eine *Orthogonalbasis* gefunden; wenn wir eine *Orthonormalbasis* wollen, müssen wir die Vektoren noch durch ihre Längen dividieren: Wir wissen bereits, daß $\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1 = \vec{c}_2 \cdot \vec{c}_2 = 4$ ist, so daß die ersten beiden Vektoren die Länge zwei haben; $\vec{c}_3$ hat vier Komponenten vom Betrag zwei, also ist

$$\vec{c}_3 \cdot \vec{c}_3 = 4 \cdot 2 = 8 \quad \text{und} \quad \|\vec{c}_2\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\,.$$

Die gesuchte Orthonormalbasis besteht daher aus den Vektoren

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ -1-i \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

Für das folgende sehr wichtig ist ein weiterer im EUKLIDischen Fall bereits wohlbekannter Satz:

Satz: $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ sei eine Orthonormalbasis eines EUKLIDischen oder HERMITEschen Vektorraums V.

a) Sind $\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + \cdots + a_n\vec{e}_n$ und $\vec{w} = b_1\vec{e}_1 + \cdots + b_n\vec{e}_n$ zwei Vektoren aus V, so ist

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} a_i\overline{b_i}\,.$$

b) Für einen Vektor $\vec{v} \in V$ ist

$$\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + \cdots + a_n\vec{e}_n \quad \text{mit} \quad a_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i\,.$$

Der *Beweis* ist in beiden Fällen ein Einzeiler:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i\overline{b_j}\;\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_{i=1}^{n} a_i\overline{b_i}\,, \quad \text{denn} \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{e}_i = (a_1\vec{e}_1 + \cdots + a_n\vec{e}_n)\cdot\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{n} a_j\vec{e}_j\cdot\vec{e}_i = a_i\,.$$

Bezüglich einer Orthonormalbasis sieht also jedes (gewöhnliche oder HERMITEsche) Skalarprodukt aus wie das entsprechende Standardskalarprodukt – und das unabhängig von der gewählten Orthonormalbasis. Sobald man Vektoren bezüglich einer Orthonormalbasis dargestellt hat, lassen sich also alle Skalarprodukte sowie auch die Basisdarstellung eines beliebigen Vektors auf die einfachst denkbare Weise darstellen. Bei der FOURIER-Analyse werden wir sehen, daß dieser Satz – angewandt auf zwei verschiedene Ortonormalbasen – auch Anwendungen hat, die weit über die einfache Berechenbarkeit hinausgehen.

§2: Harmonische Analyse periodischer Funktionen

Ziel der harmonischen Analyse ist die Zerlegung einer periodischen Funktion in einfache Schwingungen. Im allgemeinen wird man dazu unendlich viele Schwingungen brachen; zur Verdeutlichung der Begriffe ist es aber ganz nützlich, zunächst die Funktionen zu betrachten, bei denen endlich viele ausreichen.

a) Trigonometrische Polynome

Wir fixieren eine Periode $T > 0$ und setzen

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\,.$$

Definition: *a)* Ein reelles trigonometrisches Polynom zur Periode T ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, die sich mit geeigneten Zahlen $N, M \in \mathbb{N}$ als

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k\cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{M} b_\ell \sin \ell\omega t \\ &= \sum_{k=0}^{N} a_k\cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{M} b_\ell \sin \ell\omega t \end{aligned}$$

schreiben läßt.
b) Ein komplexes trigonometrisches Polynom zur Periode T ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, die sich mit einem geeigneten $N \in \mathbb{N}$ als

$$f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{k\cdot i\omega t}$$

schreiben läßt.

Aufgrund der EULERschen Beziehungen ist jedes reelle trigonometrische Polynom gleichzeitig ein komplexes, denn

$$\begin{aligned} &a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k\cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{M} b_\ell\sin\ell\omega t \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \frac{e^{k\cdot i\omega t} + e^{-k\cdot i\omega t}}{2} + \sum_{\ell=1}^{M} b_\ell \frac{e^{\ell\cdot i\omega t} e^{-\ell\cdot i\omega t}}{2i} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{2}e^{k\cdot i\omega t} + \sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{2}e^{-k\cdot i\omega t} - i\sum_{\ell=1}^{M}\frac{b_\ell}{2}e^{\ell\cdot i\omega t} + i\sum_{\ell=1}^{M}\frac{b_\ell}{2}e^{-\ell\cdot i\omega t} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{N}\frac{a_k - ib_k}{2}e^{k\cdot i\omega t} + \sum_{k=1}^{N}\frac{a_k + ib_k}{2}e^{-k\cdot i\omega t}\,. \end{aligned}$$

Schreibt man dies in der üblichen Weise als komplexes trigonometrisches Polynom $\sum c_k e^{k\cdot i\omega t}$, ist also

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & \text{für } k > 0 \\ a_0 & \text{für } k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) & \text{für } k < 0 \end{cases}\,.$$

Insbesondere sind c_k und c_{-k} für alle k komplex konjugiert zueinander; c_0 ist reel und somit zu sich selbst konjugiert.

Ist umgekehrt für ein komplexes trigonometrisches Polynom $c_k = \overline{c_{-k}}$, so ist mit $c_k = d_k + ie_k$ und $k \ge 1$

$$\begin{aligned} c_k e^{k\cdot i\omega t} + c_{-k}e^{-k\cdot i\omega t} &= d_k\left(e^{k\cdot i\omega t} + e^{-k\cdot i\omega t}\right) + ie_k\left(e^{k\cdot i\omega t} - e^{-k\cdot i\omega t}\right) \\ &= 2d_k\cos k\omega t - 2e_k\sin k\omega t\,, \end{aligned}$$

die Funktion läßt sich also auch als reelles trigonometrisches Polynom schreiben mit

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 \\ a_k &= 2\,\mathfrak{Re}\,c_k \quad \text{für } k \geq 1\ . \\ b_\ell &= -2\,\mathfrak{Im}\,c_\ell \end{aligned}$$

Wir betrachten auf dem Vektorraum aller reeller trigonometrischer Funktionen das Produkt

$$(f,\ g) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)\,dt$$

und auf dem Vektorraum aller komplexer trigonometrischer Funktionen das Produkt

$$(f,\ g) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}\,dt\ .$$

(Hier empfiehlt sich die Klammerschreibweise, da $f \cdot g$ bereits eine andere Bedeutung hat: $f \cdot g$ ist die Funktion, die an der Stelle t den Wert $f(t) \cdot g(t)$ hat.)

Lemma: *a)* Mit diesem Produkt wird der Vektorraum aller komplexer trigonometrischer Polynome der Periode T zu einem HERMITEschen Vektorraum. Die Funktionen $e^{k \cdot i\omega t}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ bilden eine Orthonormalbasis dieses Vektorraums.
b) Mit diesem Produkt wird der Vektorraum aller reeller trigonometrischer Polynome der Periode T zu einem EUKLIDischen Vektorraum. Die Funktionen $1, \cos k\omega t, \sin \ell\omega t$ für $k, \ell \in \mathbb{N}$ bilden eine Orthogonalbasis dieses Vektorraums. Der Basisvektor 1 hat die Länge eins, die Länge der übrigen Basisvektoren ist jeweils $\sqrt{1/2}$.

Beweis: Die jeweils verlangenten Linearitäts- und Symmetrieeigenschaften folgen aus der Linearität der Integration und deren Vertauschbarkeit mit der komplexen Konjugation. Für die positive Definitheit beachte man, daß $f(t)\overline{f(t)}$ eine stetige reellwertige Funktion ist, die keine negativen Werte annimmt. Für solche Funktionen wissen wir aus

Kapitel 2, §1*a)*, daß ihr Integral über ein endliches Intervall nichtnegativ ist und genau dann verschwindet, wenn die Funktion im gesamten Intervall identisch verschwindet.

Die Behauptung über Orthogonal- *bzw.* Orthonormalbasen schließlich folgt sofort aus den in §1*c)* berechneten Integralen.

■

Korollar: *a)* Ist f ein komplexes trigonometrisches Polynom, so ist

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{k \cdot i\omega t} \quad \text{mit} \quad c_k = (f,\ e^{k \cdot i\omega t}) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-k \cdot i\omega t}\,dt\ .$$

b) Ist f ein reelles trigonometrisches Polynom, so ist

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \sin \ell\omega t$$

mit

$$a_0 = (f,\ 1) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt, \quad a_k = 2(f,\ \cos k\omega T) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t$$

und

$$b_\ell = 2(f,\ \sin \ell\omega T) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin \ell\omega t\ .$$

Alle Summen in diesem Korollar sind endlich, da alle bis auf endlich viele Koeffizienten verschwinden.

Beweis: a) Nach Definition eines komplexen trigonometrischen Polynoms ist f darstellbar als Linearkombination endlich vieler Funktionen $e^{k \cdot i\omega t}$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Da diese Funktionen Teil einer Orthonormalbasis sind, ist der jeweilige Koeffizient gleich

$$(f,\ e^{k \cdot i\omega t}) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-k \cdot i\omega t}\,dt\ ,$$

und da jede Basisfunktion $e^{\ell\cdot i\omega t}$, die nicht in der Linearkombination vorkommt, zu jeder Basisfunktion in der Linearkombination orthogonal ist, verschwindet $(f, e^{\ell\cdot i\omega t})$ für jede solche Funktion.

b) Im reellen Fall bilden die Funktionen

$$1, \quad C_k(t) \underset{\text{def}}{=} \sqrt{2}\cdot\cos k\omega t \quad \text{und} \quad S_\ell(t) \underset{\text{def}}{=} \sqrt{2}\cdot\sin \ell\omega t$$

eine Orthonormalbasis; für diese läßt sich genauso argumentieren wie in *a)*; es gibt also eine Darstellung

$$f(t) = a_0\cdot 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k C_k(t) + \sum_{\ell=1}^{\infty}\beta_\ell S_\ell(t)$$

mit

$$a_0 = (f,\, 1), \quad \alpha_k = (f,\, C_k) = \sqrt{2}\cdot(f,\, \cos k\omega t)$$

und

$$\beta_\ell = (f,\, S_\ell) = \sqrt{2}\cdot(f,\, \sin \ell\omega t)\,.$$

Also ist

$$f(t) = a_0\cdot 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \sin \ell\omega t$$

mit

$$a_0 = (f,\, 1), \quad a_k = 2(f,\, \cos k\omega t) \quad \text{und} \quad b_\ell = 2(f,\, \sin \ell\omega t)\,,$$

wie behauptet. ■

b) Die Fourier-Reihe einer periodischen Funktion

Viele in Anwendungen wichtige Funktionen wie beispielsweise Rechteckimpulse lassen sich nicht als trigonometrische Polynome darstellen; wenn man ihr Verhalten in einem technischen System verstehen will, muß man sie aber trotzdem als Überlagerung reiner Schwingungen darstellen können.

Wir betrachten daher im Rest dieses Paragraphen die beiden Vektorräume

$$\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\mathbb{R}) \underset{\text{def}}{=} \left\{ f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ ist stückweise stetig und} \\ f(t+T) = f(t) \text{ für alle } t\in\mathbb{R} \end{array} \right\}$$

und

$$\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\mathbb{C}) \underset{\text{def}}{=} \left\{ f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ ist stückweise stetig und} \\ f(t+T) = f(t) \text{ für alle } t\in\mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

Stückweise stetig soll hierbei bedeuten, daß es nur isolierte Punkte gibt, in denen f nicht stetig ist; auch für diese Punkte sollen aber die links- und rechtsseitigen Limites von $f(t)$ existieren. Bei einer periodischen Funktion heißt dies, daß es im Intervall $[0,\, T]$ endlich viele Punkte

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{r-1} < t_r = T$$

gibt, so daß f in jedem der offenen Intervalle $(t_j,\, t_{j+1})$ stetig ist; an den Punkten t_j *kann* f Unstetigkeitsstellen haben. Im Reellen ist dies eine Sprungstelle im anschaulichen Sinne; im Komplexen können Real- und/oder Imaginärteil „springen“.

Insbesondere ist eine Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ genau dann stückweise stetig, wenn sowohl ihr Realteil als auch ihr Imaginärteil stückweise stetig sind; da stückweise stetige Funktionen im Reellen über jedes endliche Intervall integriert werden können, gilt dies daher auch im Komplexen.

Da die komplexen Funktionen $e^{k\cdot i\omega t}$ sowie die reellen Funktionen $\cos k\omega t$ und $\sin \ell\omega t$ allesamt stetig sind, existieren für $f\in\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$ die Integrale

$$\int_0^T f(t)e^{-k\cdot i\omega t}\,dt$$

für alle $k\in\mathbb{Z}$ und für $f\in\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ die Integrale

$$\int_0^T f(t)\,\cos k\omega t\,dt \quad \text{und} \quad \int_0^T f(t)\,\sin \ell\omega t\,dt$$

für alle $k,\ell\in\mathbb{Z}$.

Definition: *a)* Die komplexe FOURIER-Reihe einer Funktion $f\in\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$ ist die unendliche Reihe

$$S_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{k\cdot i\omega t} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-k\cdot i\omega t}\,dt\,.$$

b) Die reelle FOURIER-Reihe einer Funktion $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist die unendliche Reihe

$$S_f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \sin \ell\omega t$$

mit

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt, \quad a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t\,dt$$

und

$$b_\ell = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin \ell\omega t\,dt\,.$$

JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768–1830) begann zunächst mit einer Ausbildung zum Priester, beendete diese jedoch nicht, sondern wurde stattdessen Mathematiklehrer. 1793 trat er dem lokalen Revolutionskomittee bei, 1798 begleitete er Napoleon auf dessen Ägyptenfeldzug. Nach dem Rückzug aus Ägypten ernannte ihn Napoleon zum Präfekten von Isére; dort in Grenoble begann er mit seinen Arbeiten über Wärmeleitung, aus denen die FOURIER-Reihen hervorgingen. Nach Napoleons endgültiger Vertreibung wurde FOURIER 1817 in die Akademie der Wissenschaften gewählt; 1822 wurde er Sekretär der mathematischen Sektion.

Für trigonometrische Polynome, die natürlich alle in $\mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und, falls sie reell sind, auch in $\mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ liegen, ist nach den Ergebnissen des letzten Abschnitt stets $f(t) = S_f(t)$. Für beliebige periodische Funktionen wissen wir aber nicht einmal, ob die Reihe $S_f(t)$ überhaupt konvergiert, von der Konvergenz gegen $f(t)$ ganz zu schweigen.

Bevor wir uns diesen Fragen zuwenden, wollen wir zunächst anhand einiger Beispiele sehen, was wir realistischerweise erwarten können.

Zuvor sollten wir uns allerdings überlegen, wie wir bei der Berechnung der FOURIER-Koeffizienten überflüssigen Rechenaufwand vermeiden können.

Das größte Potential für Vereinfachungen bieten *Symmetrien* der Funktion. Die beiden wichtigsten Symmetrien sind die Eigenschaften, *gerade* oder *ungerade* zu sein: Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gerade, wenn $f(-t) = f(t)$ ist für *alle* $t \in \mathbb{R}$; sie ist ungerade, wenn $f(-t) = -f(t)$ ist für *alle* $t \in \mathbb{R}$. Auch Symmetrien bezüglich anderer Punkte als $t = 0$ lassen sich gelegentlich erfolgreich ausnützen.

A priori läßt sich keine Symmetrie bezüglich $t = 0$ für die Berechnung der hier interessierenden bestimmten Integrale mit Grenzen 0 und T ausnutzen; da wir es hier aber mit periodischen Funktionen zu tun haben, sind wir nicht an diese Integrationsgrenzen gebunden:

Lemma: Ist die Funktion g periodisch mit Periode T, so ist für jedes $\tau \in \mathbb{R}$

$$\int_0^T g(t)\,dt = \int_\tau^{\tau+T} g(t)\,dt\,.$$

Beweis: Wir können τ schreiben als

$$\tau = kT + \tau_0 \quad \text{mit} \quad 0 \le \tau_0 < T\,.$$

Wegen der Periodizität von f ist

$$\int_\tau^{\tau+T} g(t)\,dt = \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} g(t)\,dt\,;$$

es reicht also, den Fall $0 \le \tau < T$ zu betrachten. Hierfür ist

$$\int_\tau^{\tau+T} g(t)\,dt = \int_\tau^T g(t)\,dt + \int_T^{\tau+T} g(t)\,dt = \int_\tau^T g(t)\,dt + \int_0^\tau g(t)\,dt$$
$$= \int_0^\tau g(t)\,dt + \int_\tau^T g(t)\,dt = \int_0^T g(t)\,dt\,.$$

■