Wolfgang K. Seiler

Höhere Mathematik II

Vorlesung an der Universität Mannheim
im Wintersemester 2000/2001

Dieses Skriptum entsteht parallel zur Vorlesung und soll mit möglichst geringer Verzögerung verteilt werden. Es ist in seiner Qualität auf keinen Fall mit einem Lehrbuch zu vergleichen; insbesondere sind Fehler bei dieser Entstehensweise nicht nur möglich, sondern **sicher**. Dabei handelt es sich sicherlich nicht immer nur um harmlose Tippfehler, sondern auch um Fehler bei den mathematischen Aussagen.

Das Skriptum sollte daher mit Sorgfalt und einem gewissen Mißtrauen gegen seinen Inhalt gelesen werden; falls Sie Fehler finden, teilen Sie mir dies bitte persönlich oder per e-mail (seiler@math.uni-mannheim.de) mit. Auch wenn Sie Teile des Skriptums unverständlich finden, bin ich für entsprechende Hinweise dankbar.

Falls genügend viele Hinweise eingehen, werde ich von Zeit zu Zeit Berichtigungen und Verbesserungen ausgeben.

KAPITEL III: HARMONISCHE ANALYSE UND INTEGRALTRANSFORMATIONEN 1

§1: Komplexe Integrale und HERMITEsche Vektorräume 1

a) Komplexe Darstellung trigonometrischer Funktionen 1

b) Integrale komplexwertiger Funktionen 3

c) Die Orthogonalitätsrelationen für trigonometrische Funktionen . 5

d) HERMITEsche Vektorräume 7

e) Orthonormalbasen HERMITEscher Vektorräume 11

§2: Harmonische Analyse periodischer Funktionen 17

a) Trigonometrische Polynome 17

b) Die FOURIER-Reihe einer periodischen Funktion 21

c) Beispiele von FOURIER-Reihen 26

1.) Periodische Rechteckimpulse 26

2.) Sägezahnimpulse 28

3.) Konvergenz 30

d) Das GIBBS-Phänomen 37

e) Das HERMITEsche Produkt auf $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und die BESSELsche Ungleichung 41

f) Harmonische Analyse als lineare Abbildung 45

§3: Konvergenz von FOURIER-Reihen 47

a) Faltungen 47

b) Die FOURIER-Reihe einer Faltung 49

c) Faltung mit einem Sägezahn 51

d) FOURIER-Reihen stetiger stückweise differenzierbarer Funktionen 53

e) Der Eindeutigkeitssatz 55

f) Der Satz von PARSEVAL 64

g) Eine Anwendung 67

§4: Die FOURIER-Transformation 70

a) Fourier-Reihen und Fourier-Integrale 70

b) Der Satz von FUBINI 76

c) FOURIER-Integrale und Ableitungen 79

d) Die Umkehrung der FOURIER-Transformation 84

e) Die FOURIER-Transformation einer quadratintegrierbaren Funktion 89

f) Distributionen 99

g) Faltungen 104

h) Mehrdimensionale Faltungen und FOURIER-Integrale 107

i) FRAUNHOFER-Beugung 109

j) Der Abtastsatz von NYQUIST 119

§5: Die LAPLACE-Transformation 122

a) Definition und erste Eigenschaften 123

b) Rechenregeln und Beispiele zur LAPLACE-Transformation 125

KAPITEL IV: DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 129

§1: Anfangswertprobleme 129

a) Ein einfaches Beispiel 129

b) Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme ... 132

c) Anwendung der Laplace-Transformation 134

d) Systeme linearer Differentialgleichungen 146

e) Die Matrixexponentialfunktion 152

f) Berechnung der Matrixexponentialfunktion 159

§2: Eigenwerte, Eigenvektoren und Hauptvektoren 160

a) Eigenwerte und Eigenvektoren 160

b) Ein erstes Beispiel 163

c) Das charakteristische Polynom einer Matrix 168

d) Eigenwerte symmetrischer und Hermitescher Matrizen 174

e) Hauptvektoren und und die JORDAN-Zerlegung 180

f) Ergänzung: Die JORDAN-Normalform 192

§3: Anwendung auf lineare Differentialgleichungen 199

a) Ein Beispiel 199

b) Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten 202

c) Langzeitverhalten der Lösung 203

d) Lineare homogene Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten 208

e) Inhomogene Differentialgleichungen 217

§4: Nichtlineare Differentialgleichungen 226

a) Eindeutigkeitsfragen 226

b) Der Satz von Picard und Lindelöf 229

c) Eindeutigkeitsprobleme für Systeme 240

d) Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen 241

e) Exakte Differentialgleichungen und integrierende Faktoren ... 249

f) Qualitative Theorie 254

g) Stabilitätsfragen 264

KAPITEL V: OPTIMIERUNG, FEHLERRECHNUNG UND STATISTIK 279

§1: Extrema von Funktionen mehrerer Veränderlicher 279

a) Der eindimensionale Fall 279

b) Verallgemeinerung aufs Mehrdimensionale 280

§2: Maxima und Minima unter Nebenbedingungen 284

§3: Numerische Verfahren 297

a) Die Gradientenmethode 297

b) Der METROPOLIS-Algorithmus 302

c) Zusammenfassung 307

§4: Grundzüge der Fehler- und Ausgleichsrechnung 308

a) Das LAPLACEsche Fehlermodell 308

b) Statistische Kenngrößen 314

c) Das Fehlerfortpflanzungsgesetz 316

d) Die Standardabweichung des Mittelwerts und die Schätzung der Varianz 318

e) Die Methode der kleinsten Quadrate 320

§5: Die GAUSSsche Normalverteilung und die Maximum Likelihood Methode 332

a) Der Grenzfall des LAPLACEschen Fehlermodells 332

b) Die EULERsche Summenformel 335

c) Die STIRLINGsche Formel und die Normalverteilung 338

d) Eigenschaften der Normalverteilung 341

e) Die Maximum Likelihood Methode 346

§6: Kompression von Bild- und Audiodaten 349

a) Datenkompression 349

b) Kovarianzen und Korrelationen bei der Europawahl 1999 351

c) Zufallsvariablen und ihre statistischen Kenngrößen 355

d) Beispiele aus der Bildverarbeitung 357

e) Kovarianz und Korrelation von Zufallsvariablen 358

f) Modellierung von Bild- und Audiodaten durch Zufallsvariable 363

g) Komprimierung durch Dekorrelation 364

h) Die diskrete Cosinus-Transformation 368