Dann ist für jeden Einheitsvektor $\vec{e}_i$

$$\vec{V}(\boldsymbol{x} + h\vec{e}_i) = \vec{V}(\boldsymbol{x}) + h \cdot J_{\vec{V}}(\boldsymbol{x})\vec{e}_i + o(h) = \vec{V}(\boldsymbol{x}) + h\lambda_i\vec{e}_i + o(h)\,,$$

und für einen beliebigen Vektor $\vec{h} = h_1\vec{e}_1 + \cdots + h_n\vec{e}_n$ ist

$$\vec{V}(\boldsymbol{x} + \vec{h}) = \vec{V}(\boldsymbol{x}) + J_{\vec{V}}(\boldsymbol{x})\vec{h} + o\big(|\vec{h}|\big) = \vec{V}(\boldsymbol{x}) + \begin{pmatrix} \lambda_1 h_1 \\ \vdots \\ \lambda_n h_n \end{pmatrix} + o\big(|\vec{h}|\big)\,.$$

Falls alle λ_i positiv sind, hat hier jede Komponente des Vektors $\vec{V}(\boldsymbol{x}) + J_{\vec{V}}(\boldsymbol{x})\vec{h}$ dasselbe Vorzeichen wie die entsprechende Komponente von $\vec{h}$; entfernt man sich also vom Punkt $\boldsymbol{x}$, so zeigt auch die Veränderung des Vektorfelds $\vec{V}$ weg vom Punkt x und umgekehrt; die Situation ist also ungefähr so wie auf der linken Seite von Abbildung 32. Man bezeichnet $\boldsymbol{x}$ in einem solchen Fall als eine *Quelle* des Vektorfelds $\vec{V}$.

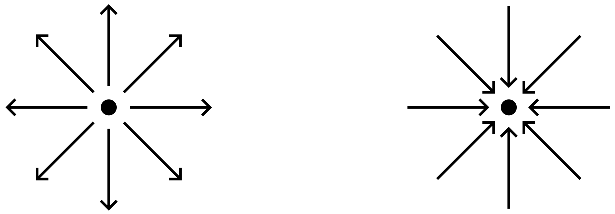

Abb. 32: Quellen und Senken

Falls alle λ_i negativ sind, gehen die Änderungen jeweils in Gegenrichtung, es sieht also ungefähr so aus wie im rechten Teil von Abbildung 32, und man spricht von einer *Senke.*

Im allgemeinen werden allerdings weder *alle* λ_i positiv noch *alle* λ_i negativ sein; die Divergenz als Summe der λ_i sagt uns dann, ob sich der Punkt eher wie eine Quelle oder eher wie eine Senke verhält.

Nun wird es natürlich nur selten vorkommen, daß die JACOBI-Matrix eine Diagonalmatrix ist; wie wir am Ende dieses Kapitels sehen werden, ist die Divergenz trotzdem auch im allgemeinen Fall eine Maßzahl dafür, ob ein Punkt Quelle oder Senke ist, und zwar in einer viel präziseren Weise, als es die obige Diskussion für Diagonalmatrizen zeigte.

Im übrigen sind Diagonalmatrizen doch nicht so speziell, wie es zunächst den Anschein hat: Im nächsten Semester werden wir sehen, daß es zu jeder symmetrischen Matrix ein Koordinatensystem gibt, bezüglich dessen die durch die Matrix definierte lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ eine Diagonalmatrix als Abbildungsmatrix hat; zumindest für den symmetrischen Anteil der JACOBI-Matrix ist die obige Diskussion also richtig. Mit dem antisymmetrischen Anteil beschäftigen wir uns im nächsten Abschnitt.

In diesem Abschnitt wollen wir uns nur noch überlegen, wie man die Divergenz eines Vektorfelds tatsächlich ausrechnet. Die Divergenz ist nach Definition gleich der Spur der JACOBI-Matrix, also ist

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{V} = \operatorname{Spur} J_{\vec{V}}(x) &= \operatorname{Spur}\begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \frac{\partial V_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} & \frac{\partial V_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial V_n}{\partial x_1} & \frac{\partial V_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial V_n}{x_n}\,.\end{aligned}$$

Genauso wie wir den Gradienten einer skalarwertigen Funktion f auch als ∇f schreiben, schreiben wir die Divergenz eines Vektorfelds $\vec{V}$ auch als $\nabla\vec{V}$. Beides kann formal auch als Produkt *bzw.* Skalarprodukt mit einem vektorwertigen Operator interpretiert werden:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

und

$$\nabla\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial V_n}{\partial x_n} .$$

Diese Interpretation darf allerdings nicht *zu* ernst genommen werden, denn obwohl Skalarprodukt und Produkt mit einem Skalar beide kommutativ sind, ist weder die Gleichung $\nabla\vec{V} = \vec{V}\nabla$ noch die Gleichung $\nabla f = f\nabla$ auch nur annähernd sinnvoll, geschweige denn richtig.

d) Die Rotation eines dreidimensionalen Vektorfelds

Erinnern wir uns zunächst an symmetrische und antisymmetrische Matrizen: Eine Matrix ist *symmetrisch,* wenn $a_{ij} = a_{ji}$ ist für alle Indexpaare (i, j); sie ist *antisymmetrisch* im Falle $a_{ij} = -a_{ji}$. Jede reelle Matrix A kann als Summe einer symmetrischen Matrix S und einer antisymmetrischen Matrix T geschrieben werden; die Einträge von S und T sind jeweils

$$\frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2} .$$

Für $n = 1$ ist jede $n \times n$-„Matrix" symmetrisch, es gibt als keinen antisymmetrischen Anteil.

Für $n = 2$ hat jede antisymmetrische Matrix A die Form

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} ,$$

für den antisymmetrischen Anteil der JACOBI-Matrix ist

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x}\right) .$$

Damit ist der antisymmetrische Anteil durch diese eine Zahl bestimmt.

Für $n > 3$ gibt es keine einfachere Darstellung des antisymmetrischen Anteils als die schiefsymmetrische Matrix selbst, bleibt also noch der für viele Anwendungen besonders wichtige Fall $n = 3$.

Eine antisymmetrische 3×3-Matrix A hat die Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} .$$

Für einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ ist daher

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha y + \beta z \\ -\alpha x + \gamma z \\ -\beta x - \gamma y \end{pmatrix} .$$

Diese spezielle Form des Matrix-Vektor-Produkts sollte Erinnerungen an das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ wecken:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix} ,$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma \\ \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Somit entspricht im Dreidimensionalen die Multiplikation mit einer schiefsymmetrischen Matrix genau dem Vektorprodukt (das im übrigen auch nur im Dreidimensionalen definierbar ist).

Der Vektor $\vec{a}$ läßt sich im vorliegenden Fall leicht ausrechnen: Die JACOBI-Matrix

$$J_{\vec{V}}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x} & \frac{\partial V_1}{\partial y} & \frac{\partial V_1}{\partial z} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} & \frac{\partial V_2}{\partial y} & \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_3}{\partial x} & \frac{\partial V_3}{\partial y} & \frac{\partial V_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

eines dreidimensionalen Vektorfelds $\vec{V}$ hat antisymmetrischen Anteil

$$A = \frac{1}{2}\left(A - {}^tA\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x} & \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial V_2}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial y} \\ \frac{\partial V_3}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial z} & \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} ,$$

und wie wir uns gerade überlegt haben, ist für jeden Vektor $\vec{v}$

$$A\vec{v} = \vec{a} \times \vec{v} \quad \text{mit} \quad \vec{a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \end{pmatrix} .$$

Da der Faktor $\frac{1}{2}$ in konkreten Rechnungen nur hinderlich wäre, betrachten wir den Vektor $2\vec{a}$ und definieren:

Definition: $\vec{V}: D \to \mathbb{R}^3$ sei ein Vektorfeld auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Dann bezeichnen wir das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} V: D \to \mathbb{R}^3; \quad \boldsymbol{x} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

als Rotation von $\vec{V}$.

Für ein Vektorfeld $\vec{V} \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^3)$, dessen JACOBI-Matrix symmetrischen Anteil S hat, ist also

$$\vec{V}(\boldsymbol{x} + \vec{h}) = \vec{V}(\boldsymbol{x}) + S\vec{h} + \tfrac{1}{2}(\operatorname{rot}\vec{V}) \times \vec{h} + o\big(|\vec{h}|\big) .$$

Der Name *Rotation* wird im folgenden (etwas umfangreichen) Beispiel verständlich: Wir gehen aus vom Vektor

$$\vec{a} = 2 \operatorname{rot}\vec{V}(\boldsymbol{x}) .$$

Nach Definition des Vektorprodukts steht $\vec{a} \times \vec{h}$ senkrecht sowohl auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{h}$. Bedenkt man noch, daß Vektoren Äquivalenzklassen von Pfeilen sind, die man sich nicht unbedingt so vorstellen muß, daß sie alle im selben Punkt beginnen, bietet sich folgende Interpretation an: Wenn wir den Vektor $\vec{h}$ um die von $\vec{a}$ aufgespannte Achse drehen, zeigt $\vec{a} \times \vec{h}$ in Richtung der Tangente der Bahn des Endpunkts von $\vec{h}$. (Damit dies stimmt, muß die Achse so orientiert werden, daß sich $\vec{h}$ im mathematisch positiven, d.h. Gegenuhrzeigersinn, um $\vec{a}$ dreht. Von der Ebene der Uhr aus gesehen zeigt dann $\vec{a}$ nach oben, $\vec{h}$ zu dem sich drehenden Punkt, und $\vec{a} \times \vec{h}$ in Richtung des Gegenuhrzeigersinns, wie man sich z.B. mit der Dreifingerregel leicht veranschaulicht.)

Der antisymmetrische Anteil der JACOBI-Matrix sollte also etwas mit einer Drehbewegung zu tun habe, genauer gesagt mit deren Geschwindigkeitsvektor, denn dieser zeigt in Richtung der Tangente der Bahnkurve.

Um dies genauer zu untersuchen, betrachten wir zunächst eine einfache Drehung eines Vektors um die z-Achse mit Drehwinkel φ. Diese ist aufgrund der Definition von Sinus

und Cosinus ausdrückbar durch die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} x &\mapsto x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y &\mapsto x\sin\varphi + y\cos\varphi \ . \\ z &\mapsto z \end{aligned}$$

Als nächstes wollen wir einen Punkt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ um eine beliebige Achse drehen; der Drehwinkel sei weiterhin φ. Dazu sei $\vec{a}$ der Einheitsvektor in Richtung der Achse; er sei so orientiert, daß der Drehsinn (bei positivem Winkel φ) gleich dem Gegenuhrzeigersinn ist. Dann gelten in den auf $\vec{a}$ senkrecht stehenden Ebenen im wesentlichen dieselbe Formeln, falls wir nur die Koordinateneinheitsvektoren der x- und der y-Achse ersetzen durch zwei aufeinander und auf $\vec{a}$ senkrecht stehende gleichlange Vektoren. Als ein solcher Vektor bietet sich der Verbindungsvektor $\vec{r}$ von der Achse zum Punkt $\boldsymbol{x}$ an, d.h. jener Vektor, der den Abstand zwischen $\boldsymbol{x}$ und der Achse beschreibt. Ein sowohl auf $\vec{r}$ als auch auf $\vec{a}$ senkrecht stehender Vektor ist $\vec{s} = \vec{a} \times \vec{r}$; da $\vec{a}$ die Länge eins hat, ist $\vec{s}$ genauso lang wie $\vec{r}$.

In der von $\vec{r}$ und $\vec{s}$ aufgespannten Ebene bildet die Drehung um den Winkel φ somit den Vektor $\alpha\vec{r} + \beta\vec{s}$ ab auf

$$(\alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi)\,\vec{r} + (\alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi)\,\vec{s} .$$

Nun zerlegen wir den Ortsvektor $\vec{x}$ eines Punktes $\boldsymbol{x}$ in einen Vektor $\vec{x}_a$ auf der Achse und den radialen, d.h. senkrecht auf der Achse stehenden, Anteil $\vec{r}$.

$\vec{x}_a$ ist die Projektion von $\vec{x}$ auf die Drehachse; da wir $\vec{a}$ als Einheitsvektor vorausgesetzt haben, ist dies nach den allgemeinen Regeln der Vektorrechnung einfach

$$\vec{x}_a = (\vec{a} \cdot \vec{x})\,\vec{a} ,$$

denn die Länge des Vektors wird bei der Projektion mit dem Cosinus des Winkels zur Achse multipliziert, und die Richtung des auf die Achse projezierten Vektors ist natürlich gleich der Richtung der Achse.

Damit läßt sich auch die radiale Komponente problemlos berechnen: Da beide Komponenten zusammen den Vektor $\vec{x}$ ergeben müssen, ist

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_a = \vec{x} - (\vec{a} \cdot \vec{x})\,\vec{a} .$$

Nun ist $\vec{x}_a$ parallel zu $\vec{a}$, und das Vektorprodukt zweier paralleler Vektoren verschwindet. Deshalb können wir auch schreiben

$$\vec{s} = \vec{a} \times \vec{r} = \vec{a} \times \Big(\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{a})\vec{a}\Big) = \vec{a} \times \vec{x} .$$

Da die Axialkomponente eines Vektors bei Drehungen erhalten bleibt, wird speziell der Vektor $\vec{x} = \vec{x}_a + \vec{r}$ also abgebildet auf

$$\begin{aligned} &\vec{x}_a + \cos\varphi\;\vec{r} + \sin\varphi\;\vec{s} \\ &= (\vec{x} \cdot \vec{a})\,\vec{a} + \cos\varphi\;\Big(\boldsymbol{x} - (\vec{x} \cdot \vec{a})\,\vec{a}\Big) + \sin\varphi\;\vec{a} \times \vec{x} \\ &= (1 - \cos\varphi)(\vec{x} \cdot \vec{a})\,\vec{a} + \cos\varphi\;\vec{x} + \sin\varphi\;\vec{a} \times \vec{x} . \end{aligned}$$

Um den Geschwindigkeitsvektor einer Drehung auszurechnen, müssen wir diese zunächst zu einem dynamischen Prozeß machen, d.h. anstelle einer Drehung mit konstantem Drehwinkel φ betrachten wir eine Drehung mit Winkelgeschwindigkeit ω. Wir gehen wieder aus von einem festen Punkt $\boldsymbol{x}$ und betrachten dessen Position zum Zeitpunkt t, d.h. wir betrachten die Funktion

$$\vec{f}\colon \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto (1-\cos\omega t)(\vec{x}\cdot\vec{a})\,\vec{a} + \cos\omega t\ \vec{x} + \sin\omega t\ \vec{a}\times\vec{x}\ . \end{cases}$$

Der Geschwindigkeitsvektor im Punkt $\boldsymbol{x}$ ist die Ableitung dieser Funktion im Nullpunkt, also der Vektor

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(0) = \Big(\omega\sin\omega t\ (\vec{x}\cdot\vec{a})\vec{a} - \omega\sin\omega t\ \vec{x} + \omega\cos\omega t\ \vec{a}\times\vec{x}\Big)_{|t=0} = \omega\vec{a}\times\vec{x}\ .$$

Mit anderen Worten: Bei der Drehung mit Winkelgeschwindigkeit ω um die von $\vec{a}$ aufgespannte Achse ist der Geschwindigkeitsvektor im Punkt $\boldsymbol{x}$ gleich $\omega\vec{a}\times\vec{x}$.

Der Vektor $\omega\vec{a}$ läßt sich auffassen als eine vektorielle Winkelgeschwindigkeit (die in der Physik in der Tat genau so definiert wird), und für einen beliebigen Vektor $\vec{\omega}\in\mathbb{R}^3$ ist das Vektorfeld

$$\vec{V}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad \boldsymbol{x}\mapsto\vec{\omega}\times\vec{x}$$

das Feld der Geschwindigkeitsvektoren zu einer Rotation mit vektorieller Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß rot $\vec{V}$ in der englischsprachigen Literatur meist als curl $\vec{V}$ geschrieben wird nach dem englischen Wort *curl* = Locke.

Wie Gradient und Divergenz können wir auch die Rotation formal mit Hilfe des Operators ∇ ausdrücken: Für ein dreidimensionales Vektorfeld $\vec{V}$ ist

$$\nabla\times\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \operatorname{rot}\vec{V}\ .$$

e) Erste Beispiele

Zum besseren Verständnis von Divergenz und Rotation und um den Umgang mit den beiden Begriffen zu üben, wollen wir sie für zwei einfache Felder ausrechnen: Für das elektrische Feld einer Punktladung und für das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters.

1) Das elektrische Feld einer Punktladung: Eine Punktladung q im Nullpunkt erzeugt nach dem COULOMBschen Gesetz ein elektrisches Feld $\vec{E}$ der Stärke

$$\vec{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\,,$$

denn die Feldstärke nimmt mit der Entfernung vom Nullpunkt quadratisch ab und hat die Richtung (oder – je nach Vorzeichen von q – auch Gegenrichtung) des Ortsvektors., d.h. der Einheitsvektor der Richtung ist $\pm\vec{x}/|\vec{x}|$, und er muß noch durch $|\vec{x}|^2$ dividiert werden.

Das Feld $\vec{E}$ ist nur definiert auf $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$; im Nullpunkt haben wir einen Nenner Null, und auch physikalisch ist es nicht sinnvoll, nach dem Feld *im Innern* einer Punktladung zu fragen: Punktladungen sind nun einmal mathematische Idealisierungen, und wirklich anwendbar ist das COULOMBsche Gesetz ohnehin erst ab einem gewissen Mindestabstand: Bei zu kleinen Abständen spielen andere Wechselwirkungen eine wesentlich größere Rolle.

In Koordinaten ist also

$$\vec{E}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} E_1(\boldsymbol{x}) \\ E_2(\boldsymbol{x}) \\ E_3(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{x}\|^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\ .$$

Zur Berechnung der Divergenz müssen wir die erste Komponente nach x, die zweite nach y und die dritte nach z ableiten und dann die drei Ableitungen addieren. Beachten wir, daß

$$\|\vec{x}\|^3 = (x^2+y^2+z^2)^{3/2}$$

ist, folgt sofort aus der Quotientenregel, daß

$$\frac{\partial E_1}{\partial x}(\boldsymbol{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{x}{\|\vec{x}\|^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\|\vec{x}\|^3 - x\cdot\frac{3}{2}\cdot 2x\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|^6}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\|\vec{x}\|^2-3x^2}{\|\vec{x}\|^5} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{x}\|^5}(-2x^2+y^2+z^2)\,.$$

Entsprechend ist

$$\frac{\partial E_2}{\partial y}(\boldsymbol{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{x}\|^5}(x^2 - 2y^2 + z^2)$$

und

$$\frac{\partial E_3}{\partial z}(\boldsymbol{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{x}\|^5}(x^2 + y^2 - 2z^2)\,,$$

also

$$\operatorname{div} \vec{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{x}\|^5}(-2x^2+y^2+z^2+x^2-2y^2+z^2+x^2+y^2-2z^2) = 0\,.$$

Zur Berechnung der Rotation benötigen wir die Einträge der JACOBI-Matrix, die nicht in der Diagonale stehen; dabei werden die Komponenten von $\vec{E}$ nach jenen Variablen abgeleitet, die *nicht* im Zähler stehen. Die Situation ist also stets dieselbe, und es genügt, wenn wir beispielsweise die Ableitung von E_1 nach y ausrechnen:

$$\frac{\partial E_1}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{x\cdot 2y}{\|\vec{x}\|^5}\,.$$

Entsprechend ist

$$\frac{\partial E_2}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{y\cdot 2x}{\|\vec{x}\|^5}\,,$$

die x-Komponente von $\operatorname{rot}\vec{E}$ als Differenz dieser beiden Ableitungen verschwindet also, und genauso überzeugt man sich auch vom Verschwinden der anderen Komponenten.

Somit ist also das Feld einer Punktladung außerhalb des Punktes selbst sowohl quellen- als auch wirbelfrei, genau wie es nach den MAXWELLschen Gleichungen auch sein muß.

2) Das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters: Das Magnetfeld eines von einem Strom der Stärke I durchflossenen geradlinigen Drahts ist nach dem BIOT-SAVARTschen Gesetz

$$\vec{H}(\boldsymbol{x}) = \frac{I}{4\pi\|\vec{r}\|^2}\,\vec{a}\times\vec{x}\,,$$

wobei $\vec{a}$ der Einheitsvektor in Richtung des Stroms und $\vec{r}$ der Abstandsvektor zwischen dem Draht und dem Punkt $\vec{x}$ ist. $\vec{H}$ ist überall im $\mathbb{R}^3$ erklärt, außer auf der von $\vec{a}$ aufgespannten Geraden, wo $\vec{r}$ der Nullvektor ist.

Zum einfacherer Rechnen wählen wir das Koordinatensystem so, daß $\vec{a}$ der Einheitsvektor in Richtung der positiven z-Achse ist; für den Punkt mit Koordinaten (x, y, z) ist dann

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad\text{und}\quad \vec{a}\times\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}\,,$$

d.h.

$$\vec{H}(\boldsymbol{x}) = \frac{I}{4\pi(x^2+y^2)}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Dieses Vektorfeld ist erklärt auf $\mathbb{R}^3$ minus der z-Achse; auf der z-Achse, d.h. im Innern des Leiters, bekommen wir eine Null in den Nenner.

Die drei Komponenten dieses Felds könnten wir nun wie oben nach den drei Variablen x, y, z ableiten, um so Rotation und Divergenz zu berechnen; es gibt allerdings auch eine andere Möglichkeit, die JACOBI-Matrix eines solchen Felds zu bestimmen: Wie auch das $\vec{E}$-Feld im obigen Beispiel läßt sich $\vec{H}$ schreiben als Produkt einer skalaren Funktion mit einer *linearen* Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Solche Funktionen, bei denen alle Nichtlinearität in einer skalaren Funktion steckt, bezeichnen wir als *quasilinear:*

Definition: Eine Funktion $\vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$ auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *quasilinear,* wenn es eine Funktion $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ und eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ gibt, so daß $\vec{f}(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x})\cdot A\vec{x}$ ist.

In diesem Sinne ist $\vec{H}(x)$ quasilinear mit

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{I}{4\pi(x^2+y^2)} \quad\text{und}\quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und das obige Feld $\vec{E}$ ist quasilinear mit

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{r}\|^3} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Lemma: Für eine quasilineare Funktion $\vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$ auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$J_{\vec{f}}(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) \cdot A + (A\vec{x}) \cdot {}^t\big(\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{x})\big) .$$

In dieser Formel steht der erste Malpunkt für die Multiplikation eines Skalars mit einer Matrix, der zweite für die Matrixmultiplikation des *Spaltenvektors* $A\vec{x}$ mit dem zum *Zeilenvektor* transponierten Gradienten; das Produkt ist eine $n \times m$-Matrix. Ausgeschrieben wird die Formel zu

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \varphi(\boldsymbol{x}) \cdot a_{ij} + \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}x_\nu\right) \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} .$$

Zum *Beweis* leiten wir $f_i(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}x_\nu$ nach x_j ab; nach der Produktregel ist, wie gewünscht,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) &= \varphi(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}x_\nu\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}x_\nu \\ &= \varphi(\boldsymbol{x}) \cdot a_{ij} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}x_\nu . \end{aligned}$$

■

Dieses Lemma wenden wir gleich an auf das Feld $\vec{H}(\boldsymbol{x})$; hier ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\boldsymbol{x}) = \frac{-2x \cdot I}{4\pi(x^2+y^2)^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\boldsymbol{x}) = \frac{-2y \cdot I}{4\pi(x^2+y^2)^2} ,$$

d.h. $\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{x}) = \dfrac{-2I}{4\pi(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$. Somit ist

$$\begin{aligned} J_{\vec{H}}(\boldsymbol{x}) &= \frac{I}{4\pi(x^2+y^2)}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \frac{-2I}{4\pi(x^2+y^2)^2}\,(\,x \quad y \quad 0\,) \\ &= \frac{I}{4\pi(x^2+y^2)^2}\left(\begin{pmatrix} 0 & -x^2-y^2 & 0 \\ x^2+y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right. \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (\,-2x \quad -2y \quad 0\,)\right) \\ &= \frac{I}{4\pi(x^2+y^2)^2}\left(\begin{pmatrix} 0 & -x^2-y^2 & 0 \\ x^2+y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right. \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} 2xy & 2y^2 & 0 \\ -2x^2 & -2xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{I}{4\pi(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} 2xy & y^2-x^2 & 0 \\ y^2-x^2 & -2xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Diese Matrix ist symmetrisch und hat Spur Null, d.h auch hier ist

$$\operatorname{div}\vec{H}(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot}\vec{H}(\boldsymbol{x}) = \vec{0} ,$$

und auch dies natürlich wieder in Übereinstimmung mit den MAXWELLschen Gleichungen.

Da die Feldlinien des hier betrachteten Felds Kreise sind, mag es auf den ersten Blick seltsam erscheinen, daß die Rotation von $\vec{H}$ verschwindet. Der Grund liegt darin, daß alle Kreise ihren Mittelpunkt auf der z-Achse haben, die wir in der obigen Rechnung ausschließen mußten: Die Rotation in einem Punkt $\boldsymbol{x}$ mißt die Rotation um $\boldsymbol{x}$, und beim betrachteten Feld rotiert eben alles um die z-Achse, so daß die Rotation überall sonst verschwindet.

f) Allgemeine Rechenregeln

Nachdem wir gerade mit relativ großem Aufwand für zwei Beispiele Divergenz und Rotation berechnet haben, wollen wir nun einige Rechenregeln herleiten, die uns unter anderem zeigen werden, daß zumindest ein Teil der obigen Rechnungen hätte vermieden werden können.

Wir wollen uns als nächstes überlegen, was passiert, wenn wir zwei der drei Operatoren grad, div und rot hintereinanderausführen – sofern dies möglich ist.

Der Gradient einer skalaren Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Vektorfeld; es ist also möglich, dessen Divergenz und Rotation zu berechnen. Um keine Probleme mit der Existenz und der Reihenfolge von Ableitungen zu haben, setzen wir voraus, daß f in $\mathcal{C}^2(D,\mathbb{R})$ liegt; dann ist

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \operatorname{div}\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\,.$$

Die rechte Seite schreiben wir auch kurz als

$$\Delta f \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

und bezeichnen

$$\Delta \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

als LAPLACE-Operator.

(Der LAPLACE-Operator ist älter als Divergenz, Gradient, Rotation und so weiter; er spielt eine große Rolle sowohl bei Wellen als auch bei Potentialfeldern. HAMILTON wählte das Zeichen ∇ in Anlehnung an diesen Operator; formal kann man $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ schreiben.)

Auch die Rotation eines Gradientenfelds läßt sich leicht berechnen, allerdings natürlich nur im $\mathbb{R}^3$, da wir für andere Dimensionen keine Rotation definiert haben.

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \operatorname{rot}\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\end{pmatrix} = \vec{0}\,.$$

Die Rotation eines stetig differenzierbaren Gradientenfelds ist also stets Null; da das elektrische Feld der negative Gradient des elektrischen Potentials ist, hätten wir oben also für

$$\vec{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} = -\operatorname{grad}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{x}\|}$$

auf die Berechnung der Rotation verzichten können.

Die Divergenz eines Vektorfelds ist eine skalare Funktion; der einzige Operator, der darauf angewandt werden kann, ist daher der Gradient:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V} = \operatorname{grad}\sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_1\partial x_i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_n\partial x_i}\end{pmatrix}\,.$$

Die Rotation eines Vektorfelds im Dreidimensionalen schließlich ist wieder ein Vektorfeld, wir können also Divergenz und Rotation davon berechnen:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{V} &= \operatorname{div}\begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial^2 V_3}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 V_2}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 V_3}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial z\partial y} = 0\end{aligned}$$

für ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Da ein Magnetfeld als Rotation eines Vektorpotentials geschrieben werden kann, erklärt dies, warum im obigen Beispiel $\operatorname{div}\vec{H} = 0$ war.

Bleibt noch die Rotation der Rotation; für diese ist nach Aufgabe 3 des zehnten Übungsblatts

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{V} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V} - \begin{pmatrix}\Delta V_1\\ \Delta V_2\\ \Delta V_3\end{pmatrix} .$$

Ebenfalls dort sind auch die beiden „Produktregeln“

$$\operatorname{div}(f\vec{V}) = f\operatorname{div}\vec{V} + (\operatorname{grad} f)\cdot\vec{V}$$

und

$$\operatorname{rot}(f\vec{V}) = f\operatorname{rot}\vec{V} + (\operatorname{grad} f)\times\vec{V}$$

bewiesen. Mit dem Operator ∇ geschrieben werden sie völlig analog zur klassischen LEIBNIZ-Regel:

$$\nabla\cdot(f\vec{V}) = f\nabla\cdot\vec{V} + \nabla f\cdot\vec{V}$$

und

$$\nabla\times(f\vec{V}) = f\nabla\times\vec{V} + \nabla f\times\vec{V}$$

Speziell für ein lineares Vektorfeld

$$\vec{V}\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n;\quad \boldsymbol{x}\mapsto A\vec{x}\quad\text{mit}\quad A\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

ist

$$\operatorname{div}\vec{V} = \sum_{i=1}^n\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \operatorname{Spur} A$$

und, im Falle $n = 3$,

$$\operatorname{rot}\vec{V} = \begin{pmatrix}a_{32}-a_{23}\\ a_{13}-a_{31}\\ a_{21}-a_{12}\end{pmatrix} ;$$

für eine quasilineare Funktion $\vec{f}(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x})A\vec{x}$ ist also nach den beiden Produktregeln

$$\operatorname{div}\vec{f} = \varphi\operatorname{Spur} A + (\operatorname{grad}\varphi)\cdot A\vec{x}$$

und

$$\operatorname{rot}\vec{f} = \varphi\cdot\begin{pmatrix}a_{32}-a_{23}\\ a_{13}-a_{31}\\ a_{21}-a_{12}\end{pmatrix} + (\operatorname{grad}\varphi)\times A\vec{x} ,$$

was uns in den Beispielen des vorigen Abschnitts manche Rechnung erspart hätte.

g) Polarkoordinaten, Kugelkoordinaten und Zylinderkoordinaten

Auch in diesem letzten Abschnitt von §4 soll es um Möglichkeiten gehen, wie wir bei diesen (und anderen) Beispielen effizienter rechnen können. Das Feld einer Punktladung beispielsweise ist kugelsymmetrisch, jedoch haben wir bei der Berechnung von Divergenz und Rotation dieses Feldes die Kugelsymmetrie mutwillig zerstört, indem wir in einem kartesischen Koordinatensystem rechneten. Hier soll es nun um Koordinatensysteme gehen, die einer solchen Symmetrie angepaßt sind.

1) Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$: Aus der Analysis I oder aus der Schule ist wohl die Polarkoordinatendarstellung einer komplexen Zahl bekannt; genauso definieren wir für jeden Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ aus $\mathbb{R}^2$ die beiden Polarkoordinaten $r > 0, \varphi$ durch die Bedingung

$$x = r\cos\varphi\quad\text{und}\quad y = r\sin\varphi .$$

φ ist dabei, wie üblich, nur modulo 2π bestimmt.

Anstelle des Gitternetzes eines kartesischen Koordinatensystems hat man bei den Poalrkoordinaten ein Netz aus Kreisen um den Nullpunkt, auf denen der Radius r konstant ist, und aus vom Nullpunkt ausgehenden Strahlen, auf denen φ konstant ist.

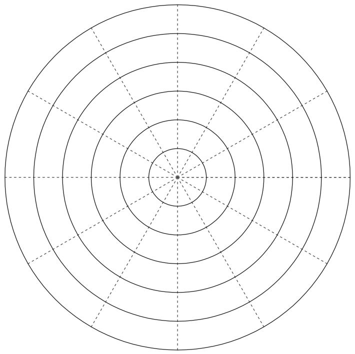

Abb. 33: Das Netz der Polarkoordinaten

Für eine Funktion $f(x,y)$ auf einer Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ können wir die Polarkoordinatendarstellung

$$F(r,\varphi) \underset{\text{def}}{=} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

betrachten; wir wollen sehen, wie man mit F allein immer noch den Gradienten oder beispielsweise auch die LAPLACEsche Δf berechnen kann.

Dazu müssen wir zunächst die partiellen Ableitungen von f nach x und y durch die von F nach r und φ ausdrücken. Dies ist auf direkte Weise etwas schwierig, da wir keine gute Formel für die Berechnung von φ aus x und y haben. Die umgekehrte Aufgabe dagegen ist umso einfacher: Nach der Kettenregel ist

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = -\frac{\partial f}{\partial x} r\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos\varphi\,.$$

Da $r > 0$ ist, können wir dies auch in der Form

$$\begin{aligned} F_r &= \quad f_x\cos\varphi + f_y\sin\varphi \\ \frac{F_\varphi}{r} &= -f_x\sin\varphi + f_y\cos\varphi \end{aligned}$$

schreiben. Dies ist ein lineares Gleichungssystem für f_x und f_y; wenn wir von der mit $\cos\varphi$ multiplizierten ersten Gleichung die mit $\sin\varphi$ multiplizierte zweite subtrahieren, erhalten wir

$$f_x = F_r\cos\varphi - \frac{F_\varphi}{r}\sin\varphi\,;$$

entsprechend erhalten wir

$$f_y = F_r\sin\varphi + \frac{F_\varphi}{r}\cos\varphi\,,$$

wenn wir die mit $\sin\varphi$ multiplizierte erste Gleichung zur mit $\cos\varphi$ multiplizierten zweiten addieren.

Entsprechend können wir auch die zweiten partiellen Ableitungen von f durch partielle Ableitungen von F ausdrücken, allerdings werden hier die Ausdrücke schon deutlich komplexer, so daß hier auf die detailierte Rechnung verzichtet sei. Wichtig ist vor allem der LAPLACE-Operator, und wenn es auch sehr umständlich wäre, dessen Darstellung in Polarkoordinaten *herzuleiten* können wir die fertige Formel

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = F_{rr} + \frac{F_r}{r} + \frac{F_{\varphi\varphi}}{r^2}\,,$$

doch leicht und relativ schnell beweisen kann, indem wir

$$F_{rr} = \big(f_{xx}\cos\varphi + f_{xy}\sin\varphi\big)\cos\varphi + \big(f_{xy}\cos\varphi + f_{yy}\sin\varphi\big)\sin\varphi$$

und

$$\begin{aligned} F_{\varphi\varphi} = &\big(f_{xx} r\sin\varphi - f_{xy} r\cos\varphi\big) r\sin\varphi - f_x r\cos\varphi \\ &- \big(f_{xy} r\sin\varphi - f_{yy} r\cos\varphi\big) r\cos\varphi - f_y r\sin\varphi \end{aligned}$$

nach der Kettenregel berechnen und einsetzen.

2) Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$: Für den $\mathbb{R}^3$ gibt es zwei naheliegende Verallgemeinerung der Polarkoordinaten: Einmal können wir in der (x,y)-Ebene Polarkoordinaten einführen, die z-Koordinate aber unverändert lassen, zum anderen können wir neben dem Abstand vom Nullpunkt zwei Winkelkoordinaten einführen, wie z.B. die geographische Länge und Breite. Hier soll es zunächst um den ersten Fall gehen, wir haben also drei Koordinaten (r,φ,z) mit $r > 0$, die über die Gleichungen

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \quad \text{und} \quad z = z$$

mit den kartesischen Koordinaten verbunden sind. Diese Koordinaten heißen *Zylinderkoordinaten,* da die Flächen $r =$ *konstant* Zylinder sind. Insbesondere ist die Koordinate r hier nicht mehr gleich dem Abstand eines Punktes vom Nullpunkt, sondern gleich dem Abstand von der z-Achse.

Da die z-Koordinate des kartesischen Koordinatensystems übernommen wird, brauchen wir für diese Koordinaten nicht neu zu rechnen, sondern können die obigen Ergebnisse praktisch wörtlich übernehmen: Mit

$$F(r,\varphi,z) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$