Für zwei Lösungsvektoren $\vec{v}, \vec{w} \in k^m$ ist

$$\varphi(\vec{v} - \vec{w}) = \varphi(\vec{v}) - \varphi(\vec{w}) = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}\,,$$

die Differenz zweier Lösungen ist also eine Lösung des entsprechenden linearen Gleichungssystems mit lauter Nullen auf der rechter Seite.

Definition: Ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ heißt *homogen,* wenn $\vec{b} = \vec{0}$ ist; ansonsten heißt es *inhomogen.* $A\vec{x} = \vec{0}$ heißt das zu $A\vec{x} = \vec{b}$ gehörige homogene Gleichungssystem.

Damit wissen wir also

Lemma: Zwei Lösungen des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ unterscheiden sich durch eine Lösung des homogenen Gleichungssystems. ■

Die Lösung eines homogenen Gleichungssystems besteht aus allen Vektoren aus k^m, die von der oben definierten linearen Abbildung φ auf den Nullvektor abgebildet werden, ist also gerade der Kern von φ und damit insbesondere ein Untervektorraum von k^n. Nach der Dimensionsformel aus §1*i)* ist

$$\dim \operatorname{Kern} \varphi = m - \dim \operatorname{Bild} \varphi\,,$$

und das Bild wird erzeugt von den m Vektoren $\varphi(\vec{e}_i) = A\vec{e}_i$. Das sind aber gerade die Spaltenvektoren der Matrix A; die Dimension des Bildes ist also gleich der Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A, und diese Zahl hatten wir oben als den (Spalten-)Rang der Matrix definiert. Damit wissen wir also

Lemma: Die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{0}$ in m Variablen ist ein Untervektorraum der Dimension $m - \operatorname{Rang} A$. ■

Im Falle eines inhomogenen Gleichungssystems ist die Sache nicht ganz so einfach; schließlich hatten wir bei den Beispielen schon gesehen, daß von zwei Gleichungssystemen, die sich nur in ihrer rechten Seite unterscheiden, das eine unlösbar sein kann, während das andere eine Lösung hat.

Bei Betrachtung der linearen Abbildung φ ist der Grund dafür klar: Das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ist genau dann lösbar, wenn die rechte Seite $\vec{b}$ im Bild von φ liegt. Damit muß sie linear abhängig sein von den Spaltenvektoren von A, da diese ja den Bildraum erzeugen, d.h. der Rang der *erweiterten* Matrix, die außer den Spaltenvektoren von A noch den Vektor $\vec{b}$ enthält, darf nicht größer sein, als der von A. Kleiner kann er natürlich nicht sein, also haben wir gezeigt

Lemma: Ein inhomogenes Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ist genau dann lösbar, wenn der Rang r seiner erweiterten Matrix gleich dem von A ist. Es ist genau dann eindeutig lösbar, wenn dieser gemeinsame Rang gleich der Anzahl m der Variablen ist. ■

Ist der gemeinsame Rang von Matrix und erweiterter Matrix kleiner als m, so ist das Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar. Da sich zwei Lösungen um eine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems unterscheiden und diese wiederum einen Vektorraum der Dimension $m - \operatorname{Rang} A$ bilden, hängt die Lösung dann von $m - \operatorname{Rang} A$ Parametern ab, ist aber für ein echt inhomogenes Gleichungssystem kein Vektorraum: Ein Vektorraum enthält stets den Nullvektor, und wenn es eine Lösung gibt, bei der *alle* Variablen verschwinden, stehen auf der rechten Seite des Gleichungssystems lauter Nullen, d.h. das Gleichungssystem ist homogen.

Das obige Lemma wird nur selten von praktischem Nutzen sein, denn wenn Matrix und erweiterte Matrix keine sehr spezielle Gestalt haben, wird der GAUSS-Algorithmus im allgemeinen die einfachste Möglichkeit sein, um die Ränge von Matrix und erweiterter Matrix zu bestimmen. Man muß ihn allerdings nicht ganz zu Ende durchführen, denn die Ränge sind schon klar, wenn auf der linken Seite Trepengestalt erreicht ist. Der Vollständigkeit halber sei hier kurz angegeben, wie diese im allerallgemeinsten Fall aussieht:

Die verschiedenen Schritte des GAUSS-Algorithmus wirken sich auf die Matrix wie auch auf die erweiterte Matrix so aus, daß entweder zwei Zeilen miteinander vertauscht werden, oder aber ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addiert wird – Addition bedeutet dabei die gewöhnliche komponentenweise Addition, d.h. die Addition von Zeilenvektoren. Am Ende entsteht eine erweiterte Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc}
[0] & \bullet & [\star] & \star & [\star] & \star & \dots & [\star] & \star & [\star] & \star \\
[0] & 0 & [0] & \bullet & [\star] & \star & \dots & [\star] & \star & [\star] & \star \\
[0] & 0 & [0] & 0 & [0] & \bullet & \dots & [\star] & \star & [\star] & \star \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
[0] & 0 & [0] & 0 & [0] & 0 & \dots & [0] & \bullet & [\star] & \star \\
\hline
[0] & 0 & [0] & 0 & [0] & 0 & \dots & [0] & 0 & [0] & \bullet \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
[0] & 0 & [0] & 0 & [0] & 0 & \dots & [0] & 0 & [0] & \bullet \\
\hline
[0] & 0 & [0] & 0 & [0] & 0 & \dots & [0] & 0 & [0] & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
[0] & 0 & [0] & 0 & [0] & 0 & \dots & [0] & 0 & [0] & 0
\end{array}\right),$$

wobei $\bullet$ für ein von Null verschiedenes und $\star$ für ein beliebiges Element des Körpers k steht; [0] und $[\star]$ stehen für keine, eine oder mehrere Nullen *bzw.* beliebige Elemente, deren Anzahl in untereinanderstehenden Termen jeweils die gleiche sein soll.

Die Zeilen zwischen den beiden eingezeichneten Linien, in denen alle Einträge der Matrix des Gleichungssystems verschwinden, müssen natürlich nicht wirklich auftreten, genauso wenig die Zeilen unterhalb der zweiten Linie, wo sogar alle Einträge der erweiterten Matrix verschwinden, so daß auch die rechten Seiten der entsprechenden Gleichungen in der Endgestalt nach Anwendung des GAUSS-Algorithmus Null sind.

Falls zwischen den beiden eingezeichneten Linien wirklich eine oder mehrere Zeilen stehen, ist das Gleichungssystem *unlösbar,* denn dann gibt es ja in der Endform des Gleichungssystems Gleichungen, in denen links alle Koeffizienten Null sind, während rechts eine von Null verschiedene Zahl steht. Indem man gegebenenfalls ein Vielfaches der ersten solchen Gleichung von den etwa vorhandenen weiteren Gleichungen subtrahiert, kann man erreichen, daß alle weiteren Gleichungen zu

$0 = 0$ werden, d.h. wir können erreichen, daß zwischen den beiden Linien *höchstens eine* Zeile steht, und das lineare Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn keine dort steht.

Damit ist klar, daß die Anzahl der Zeilen oberhalb der ersten Linie der *Rang der Matrix A* ist und die Anzahl der Zeilen oberhalb der zweiten Linie (nachdem man dafür Sorge getragen hat, daß höchstens eine Zeile zwischen den beiden Linien steht) der *Rang der erweiterten Matrix.*

Betrachten wir zunächst ein Beispiel: Im vorigen Abschnitt hatten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
 & & x_2 & & & + & 5x_4 & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 10 \\
2x_1 & + & 2x_2 & & & - & 4x_4 & - & 6x_5 & + & 2x_6 & = & 12 \\
6x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & & & - & 3x_6 & = & 15 \\
4x_1 & - & 7x_2 & & & - & 3x_4 & & & + & x_6 & = & 0 \\
2x_1 & - & 7x_2 & + & x_3 & + & 13x_4 & + & 12x_5 & - & 7x_6 & = & -8
\end{array}$$

als unlösbar erkannt. Seine erweiterte Matrix ist

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 1 & 10 \\
2 & 2 & 0 & -4 & -6 & 2 & 12 \\
6 & -3 & 1 & 5 & 0 & -3 & 15 \\
4 & -7 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\
2 & -7 & 1 & 13 & 12 & -7 & -8
\end{pmatrix},$$

und nach Anwendung des GAUSS-Algorithmus kommen wir auf die Endgestalt

$$\left(\begin{array}{ccccccc}
2 & 2 & 0 & -4 & -6 & 2 & 12 \\
0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 1 & 10 \\
0 & 0 & 1 & 62 & 0 & 0 & 69 \\
0 & 0 & 0 & 20 & 6 & 0 & 6 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}\right).$$

Somit hat die Matrix des linearen Gleichungssystems den Rang vier, wohingegen die erweiterte Matrix den Rang fünf hat.

Ändern wir im Gleichungssystem die rechte Seite der letzten Gleichung von -8 zu -9, so wird es lösbar. In der Endgestalt ändert sich, wie wir oben gesehen haben, auch nur die rechte Seite der letzten Gleichung;

die erweiterte Matrix wird also schließlich zu

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 2 & 0 & -4 & -6 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 62 & 0 & 0 & 69 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 6 & 0 & 6 \\ \hline\hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Hier haben Matrix und erweiterte Matrix denselben Rang vier.

g) Ausblick: Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme

Mancher Leser mag sich in die Mittelstufe zurückversetzt gefühlt haben, als bei den Beispielen dieses Paragraphen plötzlich Brüche auftauchten anstelle der Dezimalzahlen, mit denen der „echte Praktiker“ seinen Taschenrechner füttert.

Tatsächlich sollte der GAUSS-Algorithmus, so wie er hier vorgestellt wurde, nur für Körper benutzt werden, in denen man *exakt* rechnen kann; beim Rechnen mit reellen Zahlen, vor allem wenn es per Computer oder Taschenrechner geschieht, muß man sich meist mit Näherungslösungen begnügen, und leider können in ungünstigen Fällen selbst kleine Rundungsfehler große Auswirkungen auf das Ergebnis haben.

Der Umgang mit Gleitkommazahlen ist Gegenstand der Numerik (und teilweise auch der Praktischen Informatik); hier sei nur anhand weniger Beispiele gezeigt, daß Probleme auftreten *können:*

Beginnen wir mit dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} 1{,}35x & - & 2{,}768y & = & -10 \\ 4{,}241x & - & 8{,}69y & = & -31{,}4+\varepsilon\,. \end{array}$$

Seine Lösung liegt für $\varepsilon = 0$ bei

$$x \approx 41{,}527 \quad \text{und} \quad y \approx 23{,}866\,.$$

Stört man aber die rechte Seite nur im 0,01 in der zweiten Gleichung, ersetzt man dort also die 31,4 durch 31,41, wird die Lösung zu

$$x \approx 74{,}558 \quad \text{und} \quad y \approx 39{,}976\,,$$

und ersetzt man sie gar durch 31,5, erhält man

$$x \approx 371{,}838 \quad \text{und} \quad y \approx 184{,}964\,.$$

Schon kleine Störungen der Konstanten, wie sie durch allfällige Rundungsfehler immer wieder auftreten, können also das Ergebnis stark verfälschen. Im vorliegenden Fall läßt sich dieser Effekt leicht quantifizieren: Für allgemeines ε hat das obige Gleichungssystem die Lösung

$$x \approx 41{,}527 + 3303{,}10\varepsilon \quad \text{und} \quad y \approx 23{,}866 + 1610{,}98\varepsilon\,,$$

jede Störung der rechten Seite der zweite Gleichung führt also zu einer mehr als 3000-fachen Störung des Werts von x.

In diesem einfachen Beispiel kann man relativ schnell sehen, was passiert; außerdem deuten die im Vergleich zur rechten Seite etwas kleinen Koeffizienten auf der linken Seite darauf hin, daß es Probleme geben könnte. Leider ist die Situation nicht immer so klar: Beim linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{4}+\frac{x_4}{5}+\frac{x_5}{6}+\frac{x_6}{7} &= 1\\
\frac{x_1}{3}+\frac{x_2}{4}+\frac{x_3}{5}+\frac{x_4}{6}+\frac{x_5}{7}+\frac{x_6}{8} &= 1\\
\frac{x_1}{4}+\frac{x_2}{5}+\frac{x_3}{6}+\frac{x_4}{7}+\frac{x_5}{8}+\frac{x_6}{9} &= 1\\
\frac{x_1}{5}+\frac{x_2}{6}+\frac{x_3}{7}+\frac{x_4}{8}+\frac{x_5}{9}+\frac{x_6}{10} &= 1\\
\frac{x_1}{6}+\frac{x_2}{7}+\frac{x_3}{8}+\frac{x_4}{9}+\frac{x_5}{10}+\frac{x_6}{11} &= 1\\
\frac{x_1}{7}+\frac{x_2}{8}+\frac{x_3}{9}+\frac{x_4}{10}+\frac{x_5}{11}+\frac{x_6}{12} &= 1
\end{aligned}$$

sind die Koeffizienten im Vergleich zur rechten Seite durchaus in vernünftigen Größenordnungen, und die Lösung

$$\begin{array}{lll} x_1 = -42, & x_2 = 840, & x_3 = -5040, \\ x_4 = 12600, & x_5 = -13860, & x_6 = 5544 \end{array}$$

ist auch nicht sonderlich exotisch.

Berechnen wir die Lösung allerdings numerisch mit nur drei geltenden Ziffern, so erhalten wir die numerische Lösung

$$\begin{array}{lll} x_1 = -19{,}0, & x_2 = 171 & x_3 = -359, \\ x_4 = 216 & x_5 = -83{,}8, & x_6 = 98{,}2, \end{array}$$

die mit der korrekten Lösung offensichtlich nicht viel zu tun hat.

Bei diesem wie bei allen folgenden Beispielen von Gleitkommarechnungen wird ein Leser, der die Ergebnisse überprüfen möchte, mit hoher Wahrscheinlichkeit andere als die angegebenen Zahlenwerte erhalten. Der Grund liegt darin, daß das Ergebnis einer Rechnung mit Gleitkommazahlen nicht nur von der Anzahl der mitgeführten Dezimalstellen abhängt, sondern auch von der Reihenfolge der Rechenschritte. Das Assoziativgesetz gilt bei Gleitkommazahlen weder für die Addition noch für die Multiplikation: Beispielsweise ist bei drei geltenden Ziffern

$$(4{,}21 + 6{,}82) - 2{,}13 = 11{,}0 - 2{,}13 = 8{,}87\,,$$

aber

$$4{,}21 + (6{,}82 - 2{,}13) = 4{,}21 + 4{,}69 = 8{,}90\,,$$

wobei hier so gerechnet wurde, daß jedes Ergebnis *einer* Rechenoperation zunächst exakt bestimmt wurde und dann auf drei geltende Ziffern gerundet wurde. Die meisten heutigen Computer runden bei Gleitkommarechnungen auf diese Weise, auch wenn sie natürlich im allgemeinen nicht wirklich das exakte Zwischenergebnis berechnen. Taschenrechner können auch hier noch zusätzliche Fehler einführen.

Egal wie stark sich die Zahlenwerte, die ein Leser beim Rechnen mit drei geltenden Ziffern bekommt, von den obigen abweichen, werden sie allerdings eines gemeinsam haben: Sie haben nicht einmal entfernt mit den korrekten Zahlen zu tun und liefern somit kein brauchbares Ergebnis.

Eine Erhöhung der Ziffernzahl führt nur langsam zu besseren Ergebnissen: Bei einer Genauigkeit von vier bis fünfzehn Ziffern erhalten wir nacheinander die folgenden „Lösungen“:

Ziffern	x_1	x_2	x_3
4	-21,100	236,600	-940,200
5	8,550	-29,800	-458,970
6	19,806	-159,680	2,252
7	1,683	137,057	-1502,936
8	-33,359	699,124	-4325,108
9	-41,766	835,783	-5017,165
10	-42,004	840,010	-5039,853
11	-41,998	839,974	-5039,864
12	-41,999	839,988	-5039,936
13	-42,000	839,998	-5039,992
14	-42,000	840,000	-5039,999
15	-42,000	840,000	-5040,000
korrekt	-42	840	-5040

und

Ziffern	x_4	x_5	x_6
4	613,100	-1461,000	977,300
5	-312,910	-702,410	663,730
6	1427,120	-2813,060	1530,740
7	4960,798	-6457,628	2897,409
8	11062,780	-12367,780	5009,726
9	12418,887	-13683,876	5480,857
10	12599,672	-13859,628	5543,852
11	12600,048	-13860,032	5544,007
12	12599,855	-13859,858	5543,949
13	12599,981	-13859,982	5543,994
14	12599,998	-13859,998	5543,999
15	12600,000	-13860,000	5544,000
korrekt	12600	-13860	5544

Wie man sieht, werden die Ergebnisse erst dann halbwegs korrekt, wenn man mit mindestens zehnstelliger Genauigkeit rechnet, d.h, trotz der kleinen Koeffizienten müßte man im vorliegenden Fall mit doppeltgenauen reellen Zahlen rechnen. (Bei einer Gleitkommaarithmetik nach IEEE Standard 754, wie sie in den meisten heutigen Prozessoren realisiert ist, sind Gleitkommazahlen einfacher Genauigkeit mit einem relativen Fehlerrn von bis zu etwa $5{,}96 \cdot 10^{-8}$ behaftet, was zwischen sieben und acht geltenden Ziffern entspricht; bei doppelter Genauigkeit liegt die Schranke bei etwa $1{,}11 \cdot 10^{-16}$, was nicht ganz sechszehn geltenden Ziffern entspricht.)

Daß selbst die doppelte Genauigkeit nicht immer ausreicht, zeigt die Vergrößerung des obigen Gleichungssystems auf 15 Variable:

$$\begin{aligned}
\tfrac{x_1}{2}+\tfrac{x_2}{3}+\tfrac{x_3}{4}+\tfrac{x_4}{5}+\tfrac{x_5}{6}+\tfrac{x_6}{7}+\tfrac{x_7}{8}+\tfrac{x_8}{9}+\tfrac{x_9}{10}+\tfrac{x_{10}}{11}+\tfrac{x_{11}}{12}+\tfrac{x_{12}}{13}+\tfrac{x_{13}}{14}+\tfrac{x_{14}}{15}+\tfrac{x_{15}}{16} &= 1\\
\tfrac{x_1}{3}+\tfrac{x_2}{4}+\tfrac{x_3}{5}+\tfrac{x_4}{6}+\tfrac{x_5}{7}+\tfrac{x_6}{8}+\tfrac{x_7}{9}+\tfrac{x_8}{10}+\tfrac{x_9}{11}+\tfrac{x_{10}}{12}+\tfrac{x_{11}}{13}+\tfrac{x_{12}}{14}+\tfrac{x_{13}}{15}+\tfrac{x_{14}}{16}+\tfrac{x_{15}}{17} &= 1\\
\tfrac{x_1}{4}+\tfrac{x_2}{5}+\tfrac{x_3}{6}+\tfrac{x_4}{7}+\tfrac{x_5}{8}+\tfrac{x_6}{9}+\tfrac{x_7}{10}+\tfrac{x_8}{11}+\tfrac{x_9}{12}+\tfrac{x_{10}}{13}+\tfrac{x_{11}}{14}+\tfrac{x_{12}}{15}+\tfrac{x_{13}}{16}+\tfrac{x_{14}}{17}+\tfrac{x_{15}}{18} &= 1\\
\tfrac{x_1}{5}+\tfrac{x_2}{6}+\tfrac{x_3}{7}+\tfrac{x_4}{8}+\tfrac{x_5}{9}+\tfrac{x_6}{10}+\tfrac{x_7}{11}+\tfrac{x_8}{12}+\tfrac{x_9}{13}+\tfrac{x_{10}}{14}+\tfrac{x_{11}}{15}+\tfrac{x_{12}}{16}+\tfrac{x_{13}}{17}+\tfrac{x_{14}}{18}+\tfrac{x_{15}}{19} &= 1\\
\tfrac{x_1}{6}+\tfrac{x_2}{7}+\tfrac{x_3}{8}+\tfrac{x_4}{9}+\tfrac{x_5}{10}+\tfrac{x_6}{11}+\tfrac{x_7}{12}+\tfrac{x_8}{13}+\tfrac{x_9}{14}+\tfrac{x_{10}}{15}+\tfrac{x_{11}}{16}+\tfrac{x_{12}}{17}+\tfrac{x_{13}}{18}+\tfrac{x_{14}}{19}+\tfrac{x_{15}}{20} &= 1\\
\tfrac{x_1}{7}+\tfrac{x_2}{8}+\tfrac{x_3}{9}+\tfrac{x_4}{10}+\tfrac{x_5}{11}+\tfrac{x_6}{12}+\tfrac{x_7}{13}+\tfrac{x_8}{14}+\tfrac{x_9}{15}+\tfrac{x_{10}}{16}+\tfrac{x_{11}}{17}+\tfrac{x_{12}}{18}+\tfrac{x_{13}}{19}+\tfrac{x_{14}}{20}+\tfrac{x_{15}}{21} &= 1\\
\tfrac{x_1}{8}+\tfrac{x_2}{9}+\tfrac{x_3}{10}+\tfrac{x_4}{11}+\tfrac{x_5}{12}+\tfrac{x_6}{13}+\tfrac{x_7}{14}+\tfrac{x_8}{15}+\tfrac{x_9}{16}+\tfrac{x_{10}}{17}+\tfrac{x_{11}}{18}+\tfrac{x_{12}}{19}+\tfrac{x_{13}}{20}+\tfrac{x_{14}}{21}+\tfrac{x_{15}}{22} &= 1\\
\tfrac{x_1}{9}+\tfrac{x_2}{10}+\tfrac{x_3}{11}+\tfrac{x_4}{12}+\tfrac{x_5}{13}+\tfrac{x_6}{14}+\tfrac{x_7}{15}+\tfrac{x_8}{16}+\tfrac{x_9}{17}+\tfrac{x_{10}}{18}+\tfrac{x_{11}}{19}+\tfrac{x_{12}}{20}+\tfrac{x_{13}}{21}+\tfrac{x_{14}}{22}+\tfrac{x_{15}}{23} &= 1\\
\tfrac{x_1}{10}+\tfrac{x_2}{11}+\tfrac{x_3}{12}+\tfrac{x_4}{13}+\tfrac{x_5}{14}+\tfrac{x_6}{15}+\tfrac{x_7}{16}+\tfrac{x_8}{17}+\tfrac{x_9}{18}+\tfrac{x_{10}}{19}+\tfrac{x_{11}}{20}+\tfrac{x_{12}}{21}+\tfrac{x_{13}}{22}+\tfrac{x_{14}}{23}+\tfrac{x_{15}}{24} &= 1\\
\tfrac{x_1}{11}+\tfrac{x_2}{12}+\tfrac{x_3}{13}+\tfrac{x_4}{14}+\tfrac{x_5}{15}+\tfrac{x_6}{16}+\tfrac{x_7}{17}+\tfrac{x_8}{18}+\tfrac{x_9}{19}+\tfrac{x_{10}}{20}+\tfrac{x_{11}}{21}+\tfrac{x_{12}}{22}+\tfrac{x_{13}}{23}+\tfrac{x_{14}}{24}+\tfrac{x_{15}}{25} &= 1\\
\tfrac{x_1}{12}+\tfrac{x_2}{13}+\tfrac{x_3}{14}+\tfrac{x_4}{15}+\tfrac{x_5}{16}+\tfrac{x_6}{17}+\tfrac{x_7}{18}+\tfrac{x_8}{19}+\tfrac{x_9}{20}+\tfrac{x_{10}}{21}+\tfrac{x_{11}}{22}+\tfrac{x_{12}}{23}+\tfrac{x_{13}}{24}+\tfrac{x_{14}}{25}+\tfrac{x_{15}}{26} &= 1\\
\tfrac{x_1}{13}+\tfrac{x_2}{14}+\tfrac{x_3}{15}+\tfrac{x_4}{16}+\tfrac{x_5}{17}+\tfrac{x_6}{18}+\tfrac{x_7}{19}+\tfrac{x_8}{20}+\tfrac{x_9}{21}+\tfrac{x_{10}}{22}+\tfrac{x_{11}}{23}+\tfrac{x_{12}}{24}+\tfrac{x_{13}}{25}+\tfrac{x_{14}}{26}+\tfrac{x_{15}}{27} &= 1\\
\tfrac{x_1}{14}+\tfrac{x_2}{15}+\tfrac{x_3}{16}+\tfrac{x_4}{17}+\tfrac{x_5}{18}+\tfrac{x_6}{19}+\tfrac{x_7}{20}+\tfrac{x_8}{21}+\tfrac{x_9}{22}+\tfrac{x_{10}}{23}+\tfrac{x_{11}}{24}+\tfrac{x_{12}}{25}+\tfrac{x_{13}}{26}+\tfrac{x_{14}}{27}+\tfrac{x_{15}}{28} &= 1\\
\tfrac{x_1}{15}+\tfrac{x_2}{16}+\tfrac{x_3}{17}+\tfrac{x_4}{18}+\tfrac{x_5}{19}+\tfrac{x_6}{20}+\tfrac{x_7}{21}+\tfrac{x_8}{22}+\tfrac{x_9}{23}+\tfrac{x_{10}}{24}+\tfrac{x_{11}}{25}+\tfrac{x_{12}}{26}+\tfrac{x_{13}}{27}+\tfrac{x_{14}}{28}+\tfrac{x_{15}}{29} &= 1\\
\tfrac{x_1}{16}+\tfrac{x_2}{17}+\tfrac{x_3}{18}+\tfrac{x_4}{19}+\tfrac{x_5}{20}+\tfrac{x_6}{21}+\tfrac{x_7}{22}+\tfrac{x_8}{23}+\tfrac{x_9}{24}+\tfrac{x_{10}}{25}+\tfrac{x_{11}}{26}+\tfrac{x_{12}}{27}+\tfrac{x_{13}}{28}+\tfrac{x_{14}}{29}+\tfrac{x_{15}}{30} &= 1
\end{aligned}$$

Man beachte, daß auch in diesem Gleichungssystem die Koeffizienten der linken Seite und die rechten Seiten sich höchstens um den Faktor 30 unterscheiden, und wenn auch das Gleichungssystem im Vergleich zu den bisher betrachteten relativ groß aussieht, sind 15 Gleichungen mit 15 Unbekannten im Vergleich zu den bei praktischen Anwendungen auftretenden linearen Gleichungssystemen eher wenig.

Die folgende Tabelle zeigt die korrekten und die mit fünfzehnstelliger Genauigkeit berechneten Werte der Komponenten x_i des Lösungsvektors:

x_1	240	-3173,68185135567
x_2	-28560	228151,786322960
x_3	1113840	-5303344,76558434
x_4	-21162960	58391350,3363271
x_5	232792560	-353947335,741599
x_6	-1629547920	1247733630,21701
x_7	7682154480	-2469397672,05011
x_8	-25241364720	1965727944,18240
x_9	58896517680	2105462770,85717
x_{10}	-98160862800	-6442117291,59057
x_{11}	116008292400	4902607321,68726
x_{12}	-94915875600	1334651674,35581
x_{13}	51108548400	-4588357739,33491
x_{14}	-16287339600	2863533974,79321
x_{15}	2326762800	-619210289,163625 .

Wie man sieht, hat das berechnete Ergebnis nichts mit dem tatsächlichen zu tun.

Beim Lösen von linearen Gleichungssystemen muß man daher unbedingt darauf achten, daß Rundungsfehler auf das absolut notwendige Minimum beschränkt werden, und selbst dann muß man noch sehr vorsichtig sein. In der Numerik werden daher auch Verfahren behandelt werden, die beispielsweise durch Iteration ihre Rundungsfehler selbst konvergieren.

Hier seien nur zwei Faustregeln für den GAUSS-Algorithmus erwähnt:

1.) Die verschiedenen Gleichungen des Systems sollten Koeffizienten in ähnlichen Größenordnungen enthalten. Da sich nichts an der Lösungsmenge ändert, wenn man eine der Gleichungen mit einer von Null verschiedenen Konstanten multipliziert, kann man dies etwa dadurch erreichen, daß man alle Zeilenvektoren der Matrix des Gleichungssystems auf dieselbe Länge (z.B. Eins) normiert.

2.) Falls man ein Vielfaches einer Gleichung zu einer anderen addiert, sollte der Koeffizient, mit dem die erste Gleichung multipliziert wird, möglichst klein sein, damit die zweite Gleichung nicht zu stark gestört wird. Dies läßt sich etwa dadurch erreichen, daß man bei der Elimination einer Variablen genau die Gleichung unverändert läßt, in der diese Variable mit dem betragsgrößten Koeffizienten vorkommt.

Für alles weitere sei auf die *Numerik* verwiesen; wer nicht so lange warten möchte, findet sehr viel mehr zu diesem Thema, als in jede

Numerikvorlesung paßt, in der einschlägigen Spezialliteratur, z.B. im klassischen Buch

J.H. WILKINSON: Rounding errors in algebraic processes, *Prentice Hall,* 1963 oder *Dover,* 1994

oder in neueren Büchern wie

FRANÇOISE CHAITIN-CHATELIN, VALÉRIE FRAYSSÉ: Lectures on finite precision computations, SIAM, 1996

oder dem sehr ausführlichen Buch

NICHOLAS J. HIGHAM: Accuracy and stability of numerical algorithms, SIAM, 1996

§3: Die inverse Matrix

Nachdem wir aus §2 wissen, wann und wie sich Matrizen miteinander multiplizieren lassen, liegt es nahe, auch danach zu fragen, wann und wie sie sich durcheinander *dividieren* lassen. Da das Matrizenprodukt nicht kommutativ ist, hat die Frage in dieser Form natürlich nur wenig Sinn. Wir können sie aber sinnvoll machen, indem wir etwa fragen, ob es zu zwei gegebenen Matrizen A, B eine Matrix X gibt, so daß $AX = B$ ist.

Die Techniken, die wir im folgenden kennenlernen werden, gestatten eine Antwort auf diese Frage für beliebige $n \times m$-Matrizen A und $m \times p$-Matrizen B (mit $m \times n$-Matrizen X), aber wir wollen uns hier auf den für die Anwendungen wichtigsten Fall $n = m = p$ und die Einheitsmatrix E als rechte Seite B konzentrieren.

a) Matrixgleichungen und lineare Gleichungssysteme

Wir gehen also aus von einer gegebenen $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij}) \in k^{n\times n}$ und einer unbekannten Matrix $X = (x_{ij}) \in k^{n\times n}$; wir versuchen die Matrixgleichung $AX = E$ zu lösen.

Sind

$$\vec{x}^{\,(j)} = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}^{\,(j)} = \begin{pmatrix} \delta_{1j} \\ \vdots \\ \delta_{nj} \end{pmatrix}$$

mit

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

die Spaltenvektoren von X und E, so ist die Matrixgleichung $AX = E$ äquivalent zu den n linearen Gleichungssystemen

$$A\vec{x}^{\,(j)} = \vec{e}^{\,(j)} \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n\,,$$

die allesamt dieselbe Matrix A haben. Falls diese Gleichungen alle lösbar sind, gibt es also eine Matrix X mit $AX = E$.

Entsprechend lassen sich auch allgemeinere Matrizengleichungen der Form $AX = B$ behandeln und gegebenenfalls lösen.

b) Beispiel einer Matrixinversion

Betrachten wir als Beispiel die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 8 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

Wir müssen das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ lösen für die drei rechten Seiten

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dazu wenden wir den GAUSS-Algorithmus simultan auf alle drei Gleichungssysteme an, indem wir die drei rechten Seiten nebeneinander schreiben, d.h. wir gehen aus von einer um alle drei rechten Seiten erweiterten Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 9 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und wenden darauf die üblichen Eliminationsschritte an:

Als erstes müssen wir in der ersten Spalte alle Koeffizienten bis auf einen zu Null machen; dazu subtrahieren wir das vier- *bzw.* achtfache der ersten Zeile von der zweiten *bzw.* dritten und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -12 & -8 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Als nächstes sollte der zweite Eintrag der letzten Zeile eliminiert werden; dazu können wir $7/3$ der mittleren Zeile von der letzten subtrahieren oder aber, um Nenner zu vermeiden, sieben mal die zweite Gleichung von dreimal der dritten subtrahieren; dies führt auf

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -7 & 3 \end{pmatrix} .$$

In dieser Gestalt lassen sich die drei Gleichungssysteme nun leicht durch Rücksubstitution lösen; wir wollen aber stattdessen lieber weiter mit Zeilenoperationen arbeiten: Subtrahieren wir fünfmal die dritte Zeile von der zweiten und addieren sie dreimal zur ersten, erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 13 & -21 & 9 \\ 0 & -3 & 0 & -24 & 36 & -15 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -7 & 3 \end{pmatrix} .$$

Diese Matrix wird deutlich übersichtlicher, wenn wir die zweite Zeile durch -3 dividieren und die dritte durch -1 und schließlich noch zweimal die neue zweite Zeile von der ersten subtrahieren; sie bekommt dann die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -12 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 7 & -3 \end{pmatrix} ,$$

aus der man die Lösungsvektoren sofort ablesen kann: Da links die Einheitsmatrix steht, sind die Lösungen der Gleichungssysteme gerade die jeweiligen rechten Seiten, d.h. die rechte Matrix

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 8 & -12 & 5 \\ -4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

ist die Lösung von $AX = E$, wovon man sich zur Vorsicht vielleicht noch einmal durch Nachrechnen überzeugen sollte.

c) Anwendung auf die Invertierbarkeit einer Matrix

Aus §2*b)* wissen wir bereits, daß eine $n \times n$-Matrix genau dann invertierbar ist, wenn sie Rang n hat. Dies wollen wir uns nun noch einmal anhand der Lösbarkeitskriterien für lineare Gleichungssysteme neu überlegen.

Wir wissen, daß ein lineares Gleichungssystem genau dann lösbar ist, wenn der Rang seiner erweiterten Matrix gleich dem seiner Matrix ist. Da weder der Rang einer $n \times n$-Matrix noch der einer $n \times (n+1)$-Matrix größer als n sein können, ist diese Bedingung insbesondere dann erfüllt, wenn der Rang von $A \in k^{n\times n}$ gleich n ist; alsdann ist X sogar eindeutig bestimmt.

Umgekehrt muß der Rang von A gleich n sein, denn wenn für *alle* Spaltenvektoren $\vec{e}_i$ von E der Rang der erweiterten Matrix $(A|\vec{e}_i)$ gleich dem von A ist, sind alle $\vec{e}_i$ als Linearkombinationen der Spaltenvektoren von A darstellbar, so daß diese Spaltenvektoren ganz k^n erzeugen müssen.

Wenn wir A als Abbildungsmatrix interpretieren, ist klar, daß es genau eine inverse Matrix gibt, die dann sowohl von links als auch von rechts invers ist. Um den Umgang mit Matrizen und linearen Gleichungssystemen zu üben, wollen wir das aber auch das noch einmal direkt beweisen:

Lemma: Die $n \times n$-Matrix A habe Rang n und X sei die eindeutig bestimmte $n \times n$-Matrix, für die $AX = E$ ist. Dann ist auch $XA = E$.

Beweis: Aus $AX = E$ folgt, daß $(AX)A = EA = A$ ist; da die Matrizenmultiplikation assoziativ ist, folgt $A(XA) = A$. Außerdem ist natürlich $AE = A$; falls wir zeigen können, daß die Matrizengleichung $AY = A$ nur eine einzige Lösung $Y \in k^{n\times n}$ hat, muß also $XA = E$ sein, wie behauptet.

Die Eindeutigkeit von Y folgt aber aus dem Satz am Ende von §2*f)*, denn wir können $AY = A$ wieder als n lineare Gleichungssysteme für die Spalten von Y betrachten, und jedes dieser Gleichungssysteme hat wegen Rang $A = n$ eine eindeutig bestimmte Lösung. ■

Lemma: : Sind $A, B \in k^{n\times n}$ invertierbar, so auch ihr Produkt, und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Beweis: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$; also ist AB invertierbar und $B^{-1}A^{-1}$ ist die inverse Matrix. ■

Man beachte, daß im allgemeinen $A^{-1}B^{-1}$ *nicht* invers zu AB ist: Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sind

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

die inversen Matrizen, und Multiplikation zeigt, daß

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}B^{-1}$$

ist. Insbesondere unterscheidet sich auch

$$ABA^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 21 & -8 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

deutlich von der Einheitsmatrix.

d) Die LR-Zerlegung einer Matrix

Ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit einer invertierbaren Matrix A läßt sich zumindest formal sehr leicht auflösen: Durch Multiplikation mit A^{-1} folgt, daß $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$ ist.

Für ein einziges lineares Gleichungssystem ist diese Formel nicht sonderlich interessant, denn der Aufwand zur Berechnung von A^{-1} ist größer als der zur direkten Lösung des Gleichungssystems. Hat man aber viele lineare Gleichungssysteme, die sich nur durch ihre rechte Seiten unterscheiden, wie dies zum Beispiel bei linearen Steuerungsproblemen der Fall ist. so kann man sehr viel Zeit sparen, wenn man zunächst ein für alle Mal die inverse Matrix berechnet und dann die einzelnen Gleichungssysteme für den Preis einer Matrix-Vektor-Multiplikation lösen kann.

Falls A nicht invertierbar ist, falls man also beispielsweise eine Steuerung mit Redundanz hat, kann man nicht so vorgehen. Hier liefert die LR-Zerlegung der Matrix A ein Verfahren zur effizienten Lösung linearer Glleichungssysteme, die sich nur in ihren rechten Seiten unterscheiden.

Die Grundidee der LR-Zerlegung ist dieselbe wie die zur Berechnung der inversen Matrix: Wie wenden den GAUSS-Algorithmus simultan an auf mehrere rechte Seiten.

Um die Struktur der entstehenden Zerlegung besser zu verstehen, betrachten wir den wesentlichen Schritt des GAUSS-Algorithmus, das Addieren von Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen, als Matrizenmultiplikation: Ist

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots 1 \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

eine $n \times n$-Matrix, die an der Stelle (j, i) mit $i < j$ eine Eins hat und sonst lauter Nullen, so ist für eine beliebige $n \times n$-Matrix $A = (a_{\mu\nu})$ das Produkt

$$E_{ij}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

gleich einer Matrix, die als j-te Zeile die i-te Zeile von A hat und sonst nur aus Nullzeilen besteht. Dies folgt entweder relativ schnell durch Ausmultiplizieren, oder aber – besser – durch Betrachtung der zugehörigen linearen Abbildungen: E_{ij} ist Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung, die den ν-ten Einheitsvektor von k^n abbildet auf den ν-ten Spaltenvektor von E_{ij}; dies ist für $\nu \neq i$ der Nullvektor, und für $\nu = i$ ist es der j-te Einheitsvektor. Die lineare Abbildung zur Abbildungsmatrix E_{ij} ist also

$$\varphi_{ij}: k^n \to k^n; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_i \cdot \vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} .$$

A ist Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung φ, die den ν-ten Einheitsvektor von k^n abbildet auf den ν-ten Spaltenvektor von A, der wiederung von φ_{ij} auf $a_{i\nu}\vec{e}_j$ abgebildet wird. Die Abbildungsmatrix von $\varphi_{ij} \circ \varphi$ ist daher jene Matrix, die als j-te Zeile die i-te Zeile von A hat und sonst nur Nullzeilen enthält.

Für die Matrix $L_1 = cE_{ij} + E$, die an der Stelle (j,i) eine Konstante c stehen hat, in der Hauptdiagonalen lauter Einser und sonst nur Nullen, ist dementsprechend

$$L_1 A = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(j-1)1} & a_{(j-1)2} & \cdots & a_{(j-1)m} \\ ca_{i1} + a_{j1} & ca_{i2} + a_{j2} & \cdots & ca_{im} + a_{jm} \\ a_{(j+1)1} & a_{(j+1)2} & \cdots & a_{(j+1)m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

gerade jene Matrix, die aus A entsteht, wenn man das c-fache der i-ten Zeile zur j-ten Zeile addiert, so wie man es bei der Elimation einer Variablen im GAUSS-Algorithmus macht.

Falls also bei der Anwendung des GAUSS-Algorithmus nie eine Vertauschung zweier Zeilen notwendig ist, verändert er die Matrix des Gleichungssystems, indem er sie sukzessive mit Matrizen obiger Form

multipliziert, insgesamt gesehen also mit einem Produkt L solcher Matrizen.

Um etwas über Gestalt dieses Produkts zu erfahren, beachten wir, daß L_1 oberhalb der Diagonalen nur Nullen enthält; L_1 ist daher eine untere Dreiecksmatrix im Sinne der folgenden

Definition: Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in k^{n\times n}$ heißt *untere Dreiecksmatrix,* falls $a_{ij} = 0$ für $i < j$; sie heißt *obere Dreiecksmatrix,* falls $a_{ij} = 0$ wann immer $i > j$.

Eine 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist also genau dann eine obere Dreiecksmatrix, wenn $a_{21} = 0$ ist, und genau dann eine untere Dreiecksmatrix, wenn $a_{12} = 0$ ist, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \quad \textit{bzw.} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} .$$

Lemma: *a)* Das Produkt zweier unterer Dreiecksmatrizen ist wieder eine untere Dreiecksmatrix.
b) Das Produkt zweier oberer Dreiecksmatrizen ist wieder eine obere Dreiecksmatrix.

Beweis: a) $A = (a_{i\ell})$ und $B = (b_{\ell j})$ seien untere Dreiecksmatrizen, und $C = (c_{ij})$ sei ihr Produkt, d.h.

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j} .$$

Für $i > j$ ist für jedes $\ell < i$ der Eintrag $a_{i\ell} = 0$, da A eine untere Dreiecksmatrix ist, und für $\ell \geq i > j$ ist $b_{\ell j} = 0$, da B eine untere Dreiecksmatrix ist. Also ist auch c_{ij} als Summe von lauter Nullen gleich Null.

b) geht genauso.

■

Damit wissen wir also, daß das Produkt L der Matrizen zu den Zeilenoperationen des GAUSS-Algorithmus eine untere Dreiecksmatrix ist;

falls wir ohne Zeilenvertauschungen auskommen, ist die Anwendung des GAUSS-Algorithmus auf ein lineares Gleichungssystem für dessen Matrix also gleichbedeutend mit der Multiplikation mit einer unteren Dreiecksmatrix L.

Da der GAUSS-Algorithmus aus der Matrix eines Gleichungssystems eine obere Dreiecksmatrix R macht, erhalten wir somit eine untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R derart, daß

$$LA = R$$

ist. Dabei ist die Matrix L invertierbar, da alle ihre Faktoren invertierbar sind: Die Addition des c-fachen der i-ten Zeile zur j-ten Zeile wird rückgängig gemacht durch die Subtraktion des c-fachen der i-ten Zeile von der j-ten Zeile, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & c & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & (-c) & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Daher können wir auch schreiben

$$A = L^{-1}R\,.$$

Diese Zerlegung einer Matrix in ein Produkt zweier Dreiecksmatrizen heißt *LR-Zerlegung* der Matrix A. Da man beim GAUSS-Algorithmus im allgemeinen auch Zeilenvertauschungen benötigt, muß sie nicht immer existieren, sie existiert aber, nachdem man in A gegebenenfalls die Zeilen permutiert hat, und das ist für praktische Anwendungen gut genug.

Falls man die LR-Zerlegung einer Matrix kennt, folgt beispielsweise, daß A genau dann invertierbar ist, wenn R invertierbar ist; alsdann ist

$$A^{-1} = R^{-1}L\,.$$

Auch wenn man mehrere Gleichungssysteme

$$A\vec{x} = \vec{b}_i$$

mit verschiedenen rechten Seiten $\vec{b}^{(i)}$ lösen muß, ist die Kenntnis der LR-Zerlegung nützlich: Durch Multiplikation mit L werden die Gleichungssysteme zu

$$LA\vec{x} = R\vec{x} = L\vec{b}^{(i)}\,,$$

und diese Gleichungssysteme lassen sich problemlos lösen, da sie Treppengestalt haben, so daß man einfach sukzessive Einsetzen kann.

All dies funktioniert natürlich nur, wenn wir den GAUSS-Algorithmus anwenden können ohne daß wir Zeilen miteinander vertauschen müssen. Zeilenvertauschungen entsprechen Multiplikationen mit sogenannten *Permutationsmatrizen:* Wie wir oben gesehen haben, macht die Multiplikation mit E_{ji} die i-te Zeile einer Matrix zur j-ten Zeile und setzt alle anderen Zeilen auf Null. Multiplikation einer Matrix A mit $E_{ji}+E_{ij}$ erzeugt daher eine Matrix, die als i-te Zeile die j-te Zeile von A hat und als j-te Zeile die i-te Zeile von A; alle anderen Zeilen sind Null. Um nun noch die restlichen Zeilen in ihrer ursprünglichen Form zu bekommen, dürfen wir nicht die gesamte Einheitsmatrix addieren, denn sonst hätten wir ja als i-te und j-te Zeile der Produktmatrix jeweils die Summe der i-ten und der j-ten Zeile von A. Stattdessen müssen wir eine Diagonalmatrix D_{ij} addieren, die an der i-ten und j-ten Position der Hauptdiagonalen Nullen hat, ansonsten Einser. Wir erhalten also insgesamt die Matrix $P_{ij} = D_{ij} + E_{ij} + E_{ji}$ der Form

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix},$$

die sich nur in der i-ten und der j-ten Zeile von einer Diagonalmatrix unterscheidet.

Diese Matrix ist die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung

$$\pi_{ij}\colon k^n \to k^n; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

die die i-te und die j-te Koordinate eines Vektors vertauscht; ein Produkt solcher Matrizen ist dementsprechend die Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung, die in irgendeiner anderen Weise die Koordinaten permutiert; man bezeichnet eine solche Matrix daher als *Permutationsmatrix.* Offensichtlich enthält sie in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine Eins, ansonsten lauter Nullen. Eine Permutationsmatrix ist stets invertierbar, da man jede Permutation auch wieder rückgängig machen kann.

Da man im GAUSS-Algorithmus stets durch Zeilenvertauschungen und Eliminationsschritte zur Endgestalt kommen kann, gibt es daher zu jeder beliebigen Matrix $A \in k^{n\times n}$ eine Permutationsmatrix P, eine untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so daß

$$LPA = R$$

ist. Da P und L invertierbar sind, kann man dies auch als

$$A = P^{-1}L^{-1}R$$

schreiben, d.h. jede Matrix läßt sich schreiben als Produkt einer Permutationsmatrix, einer unteren Dreiecksmartrix und einer oberen Dreiecksmatrix. Wichtiger ist allerdings die obige Darstellung $LPA = R$, denn sie gestattet es, ein beliebiges Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

in das einfacher zu lösende Gleichungssystem

$$R\vec{x} = LP\vec{b}$$

überzuführen; nach Berechnung der beiden Matrizen R und LP lassen sich also solche Gleichungssysteme mit wechselnden rechten Seiten effizient lösen.

Nachdem die LR-Zerlegung somit durchaus recht nützlich ist, stellt sich noch die Frage, wie man sie am besten berechnet. Das oben skizzierte Verfahren zur Herleitung der LR-Zerlegung ist natürlich *im Prinzip* auch rechnerisch durchführbar, allerdings ist der Gedanke an eine Matrixmultiplikation für *jede einzelne* Zeilenoperation nicht gerade attraktiv.

Eine bessere Methode liefert, wie so oft in der linearen Algebra, der GAUSS-Algorithmus: Die Endform eines linearen Gleichungssystems nach Durchführung aller Eliminationsschritte macht aus der ursprünglichen Matrix A des Gleichungssystems die Matrix $LA = R$; zumindest diese berechnet der GAUSS-Algorithmus also direkt.

L erhalten wir, wenn wir uns überlegen, welche Funktion diese Matrix hat: Sie gibt an, welche Zeilenoperationen ausgeführt werden. Ist also $\vec{b}$ eine rechte Seite, so ist $L\vec{b}$ die rechte Seite des Gleichungssystem nach Durchführung der Eliminationsschritte. Wenn wir entsprechend neben die Matrix A noch eine Matrix B schreiben und mit dieser alle Zeilenoperationen genauso ausführen wie mit A, so steht nachher rechts die Matrix LB. Speziell für $B = E$ ist dies L selbst, d.h. das algorithmische Verfahren zur Bestimmung der LR-Zerlegung ist gerade die erste Hälfte des Verfahrens zur Bestimmung der inversen Matrix: Wir schreiben die Matrizen A und E nebeneinander und führen die Eliminationsschritte des GAUSS-Algorithmus durch; danach haben wir die Matrizen $LA = R$ und $LE = L$.

Betrachten wir dazu ein konkretes Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$