müssen auch die Abbildungsmatrizen gleich sein, wir haben also gezeigt, daß

$$A(BC) = (AB)C \quad \text{für alle } A \in k^{n\times m},\ B \in k^{m\times p},\ C \in k^{p\times q},$$

ohne daß wir ein einziges Matrixprodukt explizit ausrechnen mußten.

Genauso folgen auch die Rechenregeln

$$A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2 \quad \text{und} \quad (A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$$

aus den entsprechenden Rechenregeln

$$\varphi\circ(\psi_1+\psi_2) = \varphi\circ\psi_1 + \varphi\circ\psi_2 \quad \text{und} \quad (\varphi_1+\varphi_2)\circ\psi = \varphi_1\circ\psi + \varphi_2\circ\psi,$$

die sich wiederum leicht und ohne Rechnung überprüfen lassen:

$$\begin{aligned}\bigl(\varphi\circ(\psi_1+\psi_2)\bigr)(\vec v) &= \varphi\bigl(\psi_1(\vec v)+\psi_2(\vec v)\bigr) = \varphi\bigl(\psi_1(\vec v)\bigr) + \varphi\bigl(\psi_2(\vec v)\bigr)\\ &= (\varphi\circ\psi_1)(\vec v) + (\varphi\circ\psi_2)(\vec v) = (\varphi\circ\psi_1+\varphi\circ\psi_2)(\vec v)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\bigl((\varphi_1+\varphi_2)\circ\psi\bigr)(\vec v) &= (\varphi_1+\varphi_2)\bigl(\psi(\vec v)\bigr) = \varphi_1\bigl(\psi(\vec v)\bigr) + \varphi_2\bigl(\psi(\vec v)\bigr)\\ &= (\varphi_1\circ\psi)(\vec v) + (\varphi_2\circ\psi)(\vec v) = (\varphi_1\circ\psi+\varphi_2\circ\psi)(\vec v).\end{aligned}$$

Da in der obigen Formel für die Matrixmultiplikation alle $b_{\ell j}$ linear in den Ausdrücken für c_{ij} vorkommen *usw.,* hätten sich die beiden letzen Rechenregeln auch einfach direkt nachrechnen lassen. Ebenfalls durch direktes Nachrechnen überzeugt man sich von der Formel

$$(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B) \quad \text{für alle } \lambda \in k.$$

folgt wohl am einfachsten durch direktes Nachrechnen und für die *Einheitsmatrix*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix} \in k^{n\times n}$$

folgt ebenfalls sofort durch Nachrechnen wie auch durch Interpretation von E als Abbildungsmatrix der identischen Abbildung $k^n \to k^n$, die jeden Vektor auf sich selbst abbildet, daß

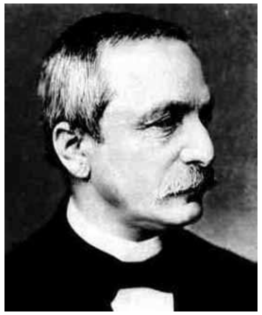
$$A\cdot E = A \qquad \text{für alle } A \in k^{m\times n}$$

und

$$E\cdot A = A \qquad \text{für alle } A \in k^{n\times m}$$

ist. Den Eintrag an der Stelle ij der Einheitsmatrix bezeichnet man als das KRONECKER-δ:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j\\ 0 & \text{falls } i \neq j\end{cases}.$$



LEOPOLD KRONECKER (1823–1891) ist heute zwar vielen nur im Zusammenhang mit dem KRONECKER-δ bekannt, er war jedoch einer der bedeutendsten deutschen Mathematiker seiner Zeit. Seine Arbeiten befaßten sich mit Algebra, Zahlentheorie und Analysis, wobei er insbesondere die Verbindungen zwischen der Analysis und den beiden anderen Gebieten erforschte. Bekannt ist auch seine Ablehnung jeglicher mathematischer Methoden, die, wie die Mengenlehre oder Teile der Analysis, unendliche Konstruktionen verwenden. Er war deshalb mit vielen anderen bedeutenden Mathematikern seiner Zeit wie etwa CANTOR und WEIERSTRASS verfeindet.

Bei den reellen Zahlen und auch sonst in jedem Körper gibt es zu jedem Element $a \neq 0$ ein inverses Element a^{-1}, so daß $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ ist. Bei Matrizen muß es das selbst für quadratische Matrizen nicht geben: Für eine beliebige Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0\\ c & 0\end{pmatrix},$$

was beides offensichtlich nie die Einheitsmatrix sein kann.

Definition: Eine $n\times n$-Matrix $A \in k^{n\times n}$ heißt *invertierbar,* wenn es eine Matrix $B \in k^{n\times n}$ gibt, so daß $AB = BA = E$ ist. B heißt inverse Matrix von A; in Zeichen $B = A^{-1}$.

(Es wäre theoretisch möglich, Invertierbarkeit auch für nichtquadratische Matrizen zu definieren, aber das hat keinen sonderlichen Nutzen.)

Um zu sehen, wann eine Matrix $A \in k^{n\times n}$ invertierbar ist, betrachten wir wieder die Situation bei den linearen Abbildungen: Zu einer linearen Abbildung $\varphi: k^n \to k^n$ gibt es genau dann eine Umkehrabbildung $\psi: k^n \to k^n$, so daß $\varphi \circ \psi$ und $\psi \circ \varphi$ beide die identische Abbildung sind, wenn φ bijektiv ist. Nach dem Korollar am Ende von §1*i)* ist dies genau dann der Fall, wenn φ surjektiv ist, wenn also das Bild von φ Dimension n hat. Dieses Bild wird aber erzeugt von den Bildern der Einheitsvektoren, und das sind gerade die Spalten der Abbildungsmatrix. Diese n Vektoren erzeugen genau dann ganz k^n, wenn sie linear unabhängig sind.

Definition: Der (Spalten-)Rang einer Matrix $A \in k^{n\times m}$ ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A.

Nach obiger Diskussion gilt daher

Lemma: Eine Matrix $A \in k^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn sie Rang n hat. Die inverse Matrix $B = A^{-1}$ ist sowohl durch die Bedingung $AB = E$ als auch durch die Bedingung $BA = E$ eindeutig bestimmt.

Die Eindeutigkeit der inversen Matrix folgt dabei natürlich aus der Eindeutigkeit der Umkehrabbildung.

c) Matrixdarstellung der komplexen Zahlen

Für alle, die noch nicht damit vertraut sind, betrachten wir zunächst den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Zu seinem Verständnis rekapitulieren wir kurz, wie die Mathematik zu den reellen Zahlen kam.

Im Anfang waren die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$. Man kann sie addieren und multiplizieren, aber man kann dort weder die Gleichung $5 + x = 2$ noch die Gleichung $5 \cdot x = 2$ lösen. Ersteres Problem führt auf die Erweiterung der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen zur Menge $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ der ganzen Zahlen, in der auch die Subtraktion uneingeschränkt ausführbar ist; letzteres führte – zumindest für positive Zahlen schon erheblich früher – zur Einführung von Brüchen und letztlich zum Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen, in dem *alle* Grundrechenarten

uneingeschränkt ausführbar sind – ausgenommen natürlich die Division durch Null.

Daß auch Brüche nicht ausreichen, bemerkten die Pythagoräer, als sie zu ihrem Entsetzen feststellen mußten, daß die Länge der Diagonalen eines Quadrats in keinem rationalen Verhältnis zur Seitenlänge steht, mit anderen Worten, daß $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Kombiniert mit dem Interesse an Grenzwerten bei EUDOXOS, ARCHIMEDES und vor allem rund 2 000 Jahre später bei EULER, LEIBNIZ, NEWTON und vielen anderen, führte dies schließlich zum Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen – wenn auch der Begriff des *Körpers* erst viel später in den Zwanzigerjahren des zwanzigsten Jahrhunderts auftauchte.

Auch hier ist noch nicht alles möglich; beispielsweise hat zwar die Gleichung $x^2 = 3$ eine reelle Lösung (genauer gesagt zwei), nicht aber die Gleichung $x^2 = -3$. Diese könnte gelöst werden, wenn man die Quadratwurzel aus -1 ziehen könnte, denn dann wäre $\sqrt{-3} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{3}$. Genauso überlegt man sich leicht, daß dann jede quadratische Gleichung eine Lösung hätte.

Es liegt also nahe, auch die reellen Zahlen zu erweitern, indem man ein neues Element hinzufügt, dessen Quadrat -1 ist. Dieses Element wird in der Mathematik und Physik traditionellerweise mit i wie *imaginär* bezeichnet, da es zur Zeit seiner Einführung als imaginäre, d.h. nur in der Vorstellung vorhandene, Zahl angesehen wurde. In der Elektrotechnik, wo I und i eine feste andere Bedeutung haben, verwendet man stattdessen den Buchstaben j.

Natürlich genügt es nicht, nur die Menge $\mathbb{R} \cup \{i\}$ zu betrachten, denn wir möchten mit den neuen Zahlen auch rechnen und dabei möglichst wenig von den bewährten Rechenregeln für reelle Zahlen aufgeben.

Insbesondere sollten also alle Zahlen der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ in der neuen Menge liegen, und es sollte möglich sein, mit ihnen wie gewohnt zu rechnen. Für zwei Zahlen $x + iy$ und $u + iv$ müßte also gelten

$$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + (iy + dv) = (x + u) + i(y + v)$$

und

$$(x+iy)(u+iv) = xu + iyu + xiv + (iy)(iv) = xu + iyu + ixv + i^2 yv$$
$$= (xu - yv) + (yu + xv)i\,.$$

Damit lassen sich Zahlen dieser Form insbesondere addieren und multiplizieren, ohne daß neue Zahlen entstehen; wir können hoffen, daß sie vielleicht sogar schon für die geplante Erweiterung ausreichen.

Um dies zu überprüfen, nehmen wir die oben heuristisch abgeleiteten Regeln als *Definition* von Addition und Multiplikation und untersuchen die entstehende Struktur:

Definition: *a)* Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist die Menge aller formaler Ausdrücke der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.
b) Auf $\mathbb{C}$ wird eine Verknüpfung „+" definiert durch die Vorschrift

$$(x+iy) + (u+iv) = (x+u) + i(y+v)\,.$$

c) Dazu kommt eine Verknüpfung „·", definiert durch

$$(x+iy)\cdot(u+iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)\,.$$

d) Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ nennen wir x den *Realteil* und y den *Imaginärteil* von z; in Zeichen

$$x = \mathfrak{Re}\, z \quad \text{und} \quad y = \mathfrak{Im}\, z\,.$$

(Eine komplexe Zahl heißt *komplex,* weil sie aus einem Realteil und einem Imaginärteil *zusammengesetzt* ist.)

Satz: Die Menge $\mathbb{C}$ mit den so definierten Verknüpfungen ist ein Körper.

Beweis: Eigentlich müßten wir alle Körperaxiome einzeln überprüfen; um aber nicht garzu viel Papier zu produzieren, möchte ich mich hier im Sinne des Umweltschutzes auf die interessantesten beschränken.

Völlig uninteressant sind die Axiome, die festlegen, daß $(\mathbb{C}, +)$ eine abelsche Gruppe sein soll: Da die Addition komponentenweise für Realteil und Imaginärteil definiert ist, folgen alle Axiome sofort aus den entsprechenden Axiomen für $\mathbb{R}$. Das Neutralelement bezüglich der Addition ist natürlich $0 + i0$, und $-(x + iy) = (-x) + i(-y)$.

Die Gruppenstruktur von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bezüglich der Multiplikation ist weniger offensichtlich. Unmittelbar einsichtig ist das Kommutativitätsgesetz; das Assoziativitätsgesetz ist eine sture Nachrechnerei, die jeder einmal, aber nur einmal in seinem Leben wirklich ausführen sollte. (Ich habe sie glücklicherweise schon hinter mir.)

Neutralelement bezüglich der Multiplikation kann, wenn alles Sinn haben soll, nur $1 + i0$ sein, und in der Tat sieht man sofort, daß jedes Element $x + iy$ sowohl bei Links- wie auch bei Rechtsmultiplikation hiermit sich selbst liefert.

Bleibt die Existenz eines multiplikativen Inversen, und hier hilft nur ein Trick: Für $x + iy \neq 0 + i0$ ist

$$(x+iy)\cdot(x-iy) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}_{>0}$$

eine positive reelle Zahl; falls also ein Inverses existiert und die üblichen Regeln der Bruchrechnung gelten, ist

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\cdot\frac{y}{x^2+y^2}\,.$$

Eine leichte Rechnung zeigt, daß dieses ganz rechts stehende Element von $\mathbb{C}$ in der Tat sowohl bei Links- als auch bei Rechtsmultiplikation mit $x + iy$ das Neutralelement $1 + i0$ liefert.

Die noch verbleibenden Distributivgesetze sind wieder Rechnerei zum Abhaken, die man genau einmal in seinem Leben durchführen sollte. ■

Damit sind also alle von der reellen Zahlen gewohnte Rechenregeln für die Grundrechenarten auch für komplexe Zahlen gültig; nicht zu retten sind allerdings die Regeln über die *Ordnungsbeziehung:* Falls es in $\mathbb{C}$ eine mit der algebraischen Struktur kompatible Ordnungsrelation gäbe, müßte $i^2 \geq 0$ sein, was nicht im Sinne des Erfinders ist.

Es ist nun klar, daß die Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \hookrightarrow \mathbb{C} \\ x & \mapsto x + i0 \end{cases}$$

eine Einbettung des Körpers der reellen in den der komplexen Zahlen definiert; da wir ersteren erweitern wollen, betrachten wir diese Einbettung als Identifikation, d.h. wir identifizieren den „formalen Ausdruck"

$x+i0$ mit der reellen Zahl x. Insbesondere sind jetzt also 0 und 1 das additive und das multiplikative Neutralelement. Außerdem schreiben wir kurz i anstelle von $0+i1$; nach den Rechenregeln, die wir inzwischen kennen, ist der „formale Ausdruck $x+iy$“ dann nichts anderes als die mit den Rechenoperationen von $\mathbb{C}$ berechnete komplexe Zahl $x+i\cdot y$.

Der Erfolg, den wir bei der Herleitung des multiplikativen Inversen durch Erweiterung mit $x-iy$ hatten, verdient es, genauer untersucht zu werden:

Definition: Für $z=x+iy\in\mathbb{C}$ heißt $\overline{z}=x-iy$ die zu z konjugiert komplexe Zahl.

(In einigen Büchern wird die konjugiert komplexe Zahl zu z auch mit z^* bezeichnet.)

Offensichtlich ist

$$\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}\,;$$

auch das Nachrechnen von

$$\overline{zw}=\overline{z}\cdot\overline{w}$$

bereitet keinerlei Schwierigkeiten.

Für die Herleitung des Inversen wesentlich war die Tatsache, daß

$$(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$$

eine reelle Zahl ist, die genau dann verschwindet, wenn sowohl x als auch y und damit auch $x+iy$ verschwinden; wir bezeichnen die Quadratwurzel aus dieser nichtnegativen reellen Zahl als *Betrag* der komplexen Zahl:

Definition: Der Betrag einer komplexen Zahl $z=x+iy$ ist

$$|z|=\sqrt{z\cdot\overline{z}}=\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Für reelles z stimmt das natürlich genau mit dem gewohnten Betrag einer reellen Zahl überein.

Offensichtlich ist $|z|=0\Leftrightarrow z=0$ und

$$\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{z\cdot\overline{z}}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}\,.$$

Der Betrag hat noch eine weitere nützliche Interpretation: Für zwei komplexe Zahlen $z=x+iy$ und $w=u+iv$ ist

$$|z-w|=\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$$

gerade der EUKLIDische Abstand zwischen den Punkten (x,y) und (u,v) der EUKLIDischen Ebenen $\mathbb{R}^2$. Da die komplexen Zahlen natürlich über die Abbildung

$$\begin{cases}\mathbb{C} & \to\mathbb{R}^2\\ x+iy & \mapsto (x,y)\end{cases}$$

in Bijektion mit den Punkten der EUKLIDischen Ebenen stehen, können wir die komplexen Zahlen also auch identifizieren mit den Punkten der EUKLIDischen Ebenen, wobei der Betrag der Differenz zwischen zwei Zahlen gerade dem Abstand entspricht. Man bezeichnet den Körper der komplexen Zahlen in diesem Zusammenhang auch als GAUSS*sche Zahlenebene.* Sie ist zwar nicht zusammen mit GAUSS auf dem Zehnmarkschein abgebildet, war aber das Thema der Sondermarke zu seinem zweihundertsten Geburtstag.

CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) leistete wesentliche Beiträge zur Zahlentheorie, zur nichteuklidischen Geometrie, zur Differentialgeometrie und Kartographie, zur Fehlerrechnung und Statistik, zur Astronomie und Geophysik *usw.* Als Direktor der Göttinger Sternwarte baute er zusammen mit dem Physiker Weber den ersten Telegraphen. Er leitete die erste Vermessung und Kartierung des Königreichs Hannover und zeitweise auch den Witwenfond der Universität Göttingen; seine hierbei gewonnene Erfahrung benutzte er für erfolgreiche Spekulationen mit Aktien. Sätze und Verfahren von Gauß werden uns im Laufe der Vorlesung noch häufig begegnen.

Offensichtlich bilden die komplexen Zahlen einen $\mathbb{R}$-Vektorraum, und die Abbildung

$$\mathbb{C}\to\mathbb{C};\quad z\mapsto cz$$

ist für jede komplexe Zahl $c = a + ib \in \mathbb{C}$ insbesondere eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}$-Vektorräumen. Wählen wir $\{1, i\}$ als $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}$, so bildet sie die beiden Basisvektoren 1 und i ab auf

$$c \cdot 1 = a + bi \quad \text{und} \quad c \cdot i = ai + bi^2 = -b + ai\ ;$$

sie hat also die Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} .$$

Die Hintereinanderausführung zweier solcher Abbildungen entspricht der Multiplikation der entsprechenden komplexen Zahlen; insbesondere gehört also das Produkt $(a + ib)(a' + ib')$ zweier komplexer Zahlen zur Produktmatrix

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} .$$

Der Körper der komplexen Zahlen kann damit auch identifiziert werden mit der Menge aller reeller 2×2-Matrizen der obigen Form mit der Matrixaddition und dem Matrixprodukt. Man beachte, daß das Produkt zweier Matrizen dieser speziellen Form kommutativ ist.

d) Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Die meisten kennen wohl aus der Schule zumindest Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme in bis zu drei Unbekannten, teilweise vielleicht auch für Systeme aus beliebig vielen Gleichungen in beliebig vielen Unbekannten.

Der GAUSS-Algorithmus, mit dem wir uns hier beschäftigen wollen, bestimmt die Lösungsmenge eines beliebigen linearen Gleichungssystems, und falls das Gleichungssystem nicht gerade eine spezielle Gestalt hat, liefert er sie im allgemeinen auf die effizienteste Art und Weise.

Die Grundidee seines Verfahrens zur Lösung linearer Gleichungssysteme ist sehr einfach: Im Falle einer einzigen Gleichung mit einer einzigen Unbekannten x können wir das „Gleichungssystem“

$$ax = b$$

sofort lösen: Für $a \neq 0$ ist $x = -b/a$, d.h. $\mathcal{L} = \{-b/a\}$; ansonsten gibt es für $b \neq 0$ keine Lösung, d.h. $\mathcal{L} = \emptyset$, und für $a = b = 0$ ist jedes x aus k eine Lösung, d.h. $\mathcal{L} = k$.

Das GAUSSsche Eliminationsverfahren führt ein allgemeines lineares Gleichungssystem sukzessive zurück auf solche lineare Gleichungen in einer Unbekannten, ausgehend von zwei trivialen Beobachtungen:

1. Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems ändert sich nicht, falls wir zwei Gleichungen miteinander vertauschen.
2. Die Lösungsmenge ändert sich auch dann nicht, wenn wir ein Vielfaches einer Gleichung zu einer anderen addieren, d.h. wenn wir die Gleichung

   $$\ell_j(x_1, \ldots, x_m) \underset{\text{def}}{=} a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jm}x_m = b_j$$

   ersetzen durch

   $$\ell_j(x_1, \ldots, x_m) + \lambda \ell_i(x_1, \ldots, x_m) = b_j + \lambda b_i\ , \qquad (*)$$

   denn unter der Nebenbedingung

   $$\ell_i(x_1, \ldots, x_m) = b_i$$

   ist $(*)$ äquivalent zu $\ell_j(x_1, \ldots, x_m) = 0$.

Mit Hilfe dieser beiden Beobachtungen läßt sich nun die Variablenanzahl wie folgt sukzessive reduzieren: Beginnen wir mit der Elimination von x_1. Falls x_1 im Gleichungssystem überhaupt nicht vorkommt, falls also alle $a_{i1} = 0$ sind, gibt es nichts zu tun: Wir haben ein Gleichungssystem in $x_2, \ldots, x_m$, und für jede Lösung $(x_2, \ldots, x_m)$ dieses Systems sowie jedes beliebige $x_1 \in k$ ist $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ eine Lösung des ursprünglichen Systems.

Ansonsten können wir, indem wir nötigenfalls zwei Gleichungen miteinander vertauschen, annehmen, daß $a_{11} \neq 0$ ist. Dann lassen wir die erste Gleichung so stehen, wie sie ist, und ersetzen jede weitere Gleichung $\ell_j(x_1, \ldots x_m) = b_j$ durch

$$\ell_j(x_1, \ldots x_m) - \frac{a_{j1}}{a_{11}} \ell_1(x_1, \ldots x_m) = b_j - \frac{a_{j1}}{a_{11}} b_1\ ;$$

in diesen Gleichungen kommt x_1 offenbar nicht mehr vor. Wir haben somit ein Gleichungssystem in einer Variablen weniger, plus der Gleichung

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \,.$$

Sobald wir das Gleichungssytem für $x_2, \ldots, x_m$ gelöst haben, wird diese Gleichung nach Einsetzen einer Lösung $(x_2, \ldots, x_m)$ zu einer linearen Gleichung für x_1, die wir lösen können:

$$x_1 = \frac{b_1 - (a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m)}{a_{11}} \,.$$

Das Gleichungssystem für $x_2, \ldots, x_m$ wird nun, falls $m > 2$ ist, nach genau derselben Methode weiterreduziert: Falls x_2 in keiner der Gleichungen vorkommt, haben wir tatsächlich ein Gleichungssystem in $x_3, \ldots, x_m$, andernfalls können wir durch Vertauschen zweier Gleichungen annehmen, daß x_2 in der ersten Gleichung mit einem von Null verschiedenen Vorfaktor auftritt, und wir können wie oben x_2 aus allen weiteren Gleichungen eliminieren *usw.*

Da in jedem Eliminationsschritt ein Nenner auftritt, können die Nenner vor allem bei großem m gelegentlich schnell unübersichtlich groß werden. Obwohl es *im Prinzip* nicht notwendig ist, kann man um dies zu vermeiden noch als dritte Operation die Multiplikation einer Gleichung mit einem Körperelement (z.B. einem Hauptnenner der Koeffizienten) zulassen. Dies ist gleichbedeutend damit, daß man anstelle der Operation $(*)$ allgemeiner die Ersetzung von $\ell_j(x_1, \ldots x_m)$ durch

$$\mu\ell_j(x_1, \ldots x_m) + \lambda\ell_i(x_1, \ldots x_m)$$

mit beliebigem $\mu \neq 0$ aus k zuläßt. ($\mu = 0$ muß hier natürlich unbedingt ausgeschlossen werden, denn sonst läßt sich die Gleichung $\ell_j(x_1, \ldots, x_m) = 0$ aus dem neuen Gleichungssystem nicht mehr herleiten, d.h. wir erhalten auch „Lösungen“, die diese Gleichung nicht erfüllen.)

e) Erste Beispiele

Betrachten wir dazu einige Beispiele; der Grundkörper k sei dabei jeweils der Körper der reellen Zahlen oder einer seiner Teilkörper, etwa $k = \mathbb{Q}$.

Sei zunächst

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_2 & = & 19 \end{array}$$

das zu lösende Gleichungssystem. Da x_1 in der ersten Gleichung tatsächlich vorkommt, müssen wir nichts vertauschen; allerdings müssen wir ein Drittel der ersten Gleichung von der zweiten und fünf Drittel der ersten Gleichung von der dritten subtrahieren, um x_2 aus diesen beiden Gleichungen zu eliminieren, was auf das etwas unangenehme Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & & \frac{4}{3}x_2 & + & \frac{11}{3}x_3 & = & \frac{4}{3} \\ & & -\frac{19}{3}x_2 & + & \frac{16}{3}x_3 & = & \frac{32}{3} \end{array}$$

führt. Solche Gleichungssysteme sind zwar nicht immer vermeidbar, aber hier hätten wir es auch einfacher haben können: Wenn wir im ursprünglichen Gleichungssystem die ersten beiden Gleichungen vertauschen, wird es zu

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_2 & = & 19\,, \end{array}$$

und hier müssen wir stattdessen das Dreifache *bzw.* Fünffache der ersten Gleichung von der zweiten *bzw.* dritten subtrahieren, was auf das deutlich angenehmere Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ & & -4x_2 & - & 11x_3 & = & -4 \\ & & -13x_2 & - & 13x_3 & = & 4 \end{array}$$

führt. Etwas ähnliches hätten wir auch bekommen, wenn wir die letzten beiden Gleichungen des anderen Systems einfach mit drei multipliziert hätten, aber grundsätzlich ist es meistens günstiger, die Gleichung mit dem einfachsten führenden Koeffizienten an erster Stelle zu haben. Auch hier wird das Gleichungssystem zumindest optisch etwas angenehmer, wenn wir die zweite und die dritte Gleichung mit (-1) multiplizieren:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ & & 4x_2 & & 11x_3 & = & 4 \\ & & 13x_2 & + & 13x_3 & = & -4 \end{array}$$

Uns interessieren zunächst nur die letzten beiden Zeilen. Diese bilden ein lineares Gleichungssystem in x_2 und x_3, aus dem wir x_2 in einer der beiden Gleichungen eliminieren möchten.

Da x_2 in der zweiten Gleichung wirklich vorkommt, subtrahieren wir $13/4$ mal diese Gleichung von der dritten und erhalten als neues System

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & & 4x_2 & + & 11x_3 & = & 4 \\ & & & & -\frac{91}{4}x_3 & = & -17\,. \end{array}$$

Hier ist die letzte Gleichung eine gewöhnliche lineare Gleichung für x_3, aus der wir sofort ablesen, daß

$$x_3 = \frac{68}{91}$$

ist. Dies setzen wir in die vorletzte Gleichung ein:

$$4x_2 + \frac{748}{91} = 4$$

ist eine lineare Gleichung für x_2 mit Lösung

$$x_2 = -\frac{96}{91}\,.$$

Dies sowie x_3 setzen wir schließlich in die erste Gleichung ein:

$$x_1 + \frac{80}{91} = 3$$

hat die Lösung

$$x_1 = \frac{193}{91}\,,$$

so daß ingesamt

$$\left(\frac{193}{91}, -\frac{96}{91}, \frac{68}{91}\right)$$

die (einzige) Lösung des Gleichungssystems ist.

Als nächstes Beispiel betrachten wir

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcr} & & & & 5x_3 & & & & & - & 2x_6 & & & = & 3 \\ & & 4x_2 & & & + & 2x_4 & & & - & 3x_6 & - & 7x_7 & = & -2 \\ x_1 & & & & & - & 3x_4 & + & x_5 & & & & & = & 0 \end{array}$$

Hier kommt x_1 in der ersten Gleichung nicht vor, wohl aber in der dritten. Wir vertauschen daher die erste Gleichung mit der dritten und erhalten

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcr} x_1 & & & & & - & 3x_4 & + & x_5 & & & & & = & 0 \\ & & 4x_2 & & & + & 2x_4 & & & - & 3x_6 & - & 7x_7 & = & -2 \\ & & & & 5x_3 & & & & & - & 2x_6 & & & = & 3\,. \end{array}$$

In diesem Gleichungssystem kommt x_1 nur in der ersten Gleichung vor, x_2 nicht mehr hinter der zweiten und x_3 (natürlich) nicht mehr hinter der dritten, wir haben also bereits die Treppengestalt erreicht.

Die dritte Gleichung $5x_3 - 2x_6 = 3$ hat offensichtlich keine eindeutig bestimmte Lösung: Wir können entweder nach x_3 oder nach x_6 auflösen, so daß eine der beiden Unbekannten beliebig bewählt werden kann. Wählen wir etwa für x_6 irgendein Element $\alpha \in k$, so wird

$$x_6 = \alpha, \quad x_3 = \frac{2}{5}\alpha + \frac{3}{5}\,.$$

Die zweite Gleichung wird nach Einsetzen von $x_6 = \alpha$ zu

$$4x_2 + 2x_4 - 3\alpha - 7x_7 = -2\,,$$

also zu einer Beziehung zwischen x_2, x_4 und x_7, denn α ist ein bereits fest gewähltes und somit bekanntes Element des Grundkörpers k. Wieder können wir eine der beiden Variablen willkürlich festlegen, etwa x_7 auf ein $\beta \in k$ setzen und x_4 auf ein $\gamma \in k$; wir erhalten

$$x_7 = \beta, \quad x_4 = \gamma, \quad x_2 = \frac{3}{4}\alpha + \frac{7}{4}\beta - \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}\,.$$

In der ersten Gleichung schließlich müssen wir alle bereits berechneten oder festgelegten Unbekannten einsetzen und erhalten dann die Gleichung

$$x_1 - 3\gamma + x_5 = 0\,.$$

Hier können wir noch $x_5 = \delta$ beliebig festlegen und erhalten dann für die letzte noch verbleibende Variable

$$x_1 = 3\gamma - \delta\,.$$

Insgesamt hängt die Lösung dieses Gleichungssystems also ab von vier willkürlich wählbaren Körperelementen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in k$ oder, wie wir auch sagen werden, von vier *Parametern.* Die *Lösungsmenge* $\mathcal{L}$ ist daher die Menge

$$\left\{\left(3\gamma-\delta, \frac{3}{4}\alpha+\frac{7}{4}\beta-\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\alpha+\frac{3}{5}, \gamma, \delta, \alpha, \beta\right) \;\middle|\; \alpha, \beta, \gamma, \delta \in k\right\}.$$

Im ersten Beispiel brauchten wir von den beiden Operationen des GAUSS-Algorithmus nur den Eliminationsschritt, im zweiten nur den Vertauschungsschritt. Als nächstes betrachten wir ein Beispiel, in dem beide notwendig sind, das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
 & & x_2 & & & + & 5x_4 & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 10\\
2x_1 & + & 2x_2 & & & - & 4x_4 & - & 6x_5 & + & 2x_6 & = & 12\\
6x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & & & - & 3x_6 & = & 15\\
4x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & & & + & x_6 & = & 0\\
6x_1 & - & 6x_2 & + & x_3 & + & 10x_4 & + & 12x_5 & - & 6x_6 & = & -8
\end{array}$$

Hier kommt x_1 ausgerechnet in der ersten Gleichung nicht vor, dafür aber in allen folgenden; wir müssen also die erste Gleichung mit einer der anderen vertauschen, etwa der zweiten:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
2x_1 & + & 2x_2 & & & - & 4x_4 & - & 6x_5 & + & 2x_6 & = & 12\\
 & & x_2 & & & + & 5x_4 & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 10\\
6x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & & & - & 3x_6 & = & 15\\
4x_1 & - & 7x_2 & & & - & 3x_4 & & & + & x_6 & = & 0\\
2x_1 & - & 7x_2 & + & x_3 & + & 13x_4 & + & 12x_5 & - & 6x_6 & = & -8
\end{array}$$

Nun kommt x_1 in der zweiten Gleichung nicht mehr vor; aus der dritten, vierten *bzw.* fünften Gleichung kann x_1 eliminiert werden, indem man dreimal, zweimal *bzw.* einmal die erste Gleichung subtrahiert:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
2x_1 & + & 2x_2 & & & - & 4x_4 & - & 6x_5 & + & 2x_6 & = & 12\\
 & & x_2 & & & + & 5x_4 & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 10\\
 & & -9x_2 & + & x_3 & + & 17x_4 & + & 18x_5 & - & 9x_6 & = & -21\\
 & & -3x_2 & & & + & 5x_4 & + & 12x_5 & - & 3x_6 & = & -24\\
 & & -12x_2 & + & x_3 & + & 22x_4 & + & 30x_5 & - & 12x_6 & = & -44
\end{array}$$

Als nächstes muß x_2 aus der dritten bis fünften Gleichung eliminiert werden; da x_2 in der zweiten Gleichung mit Koeffizient eins vorkommt, müssen wir einfach jenes Vielfache der zweiten Gleichung subtrahieren, das dem jeweiligen x_2-Koeffizienten entspricht. Da hier alle diese

Koeffizienten negativ sind, bedeutet dies, daß wir dasjenige Vielfache der zweiten Gleichung *addieren,* das dem Betrag des Koeffizienten entspricht:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
2x_1 & + & 2x_2 & & & - & 4x_4 & - & 6x_5 & + & 2x_6 & = & 12\\
 & & x_2 & & & + & 5x_4 & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 10\\
 & & & & x_3 & + & 62x_4 & & & & & = & 69\\
 & & & & & & 20x_4 & + & 6x_5 & & & = & 6\\
 & & & & x_3 & + & 82x_4 & + & 6x_5 & & & = & 76\,.
\end{array}$$

Hier muß x_3 aus der letzten Gleichung eliminiert werden; dazu muß offenbar einfach die dritte Gleichung subtrahiert werden:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
2x_1 & + & 2x_2 & & & - & 4x_4 & - & 6x_5 & + & 2x_6 & = & 12\\
 & & x_2 & & & + & 5x_4 & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 10\\
 & & & & x_3 & + & 62x_4 & & & & & = & 69\\
 & & & & & & 20x_4 & + & 6x_5 & & & = & 6\\
 & & & & & & 20x_4 & + & 6x_5 & & & = & 7\,.
\end{array}$$

Eigentlich sollte man hier schon sehen, was los ist, aber wir rechnen zur Veranschaulichung des GAUSS-Algorithmus trotzdem stur weiter nach Schema F: Danach muß x_4 aus der letzten Gleichung eliminiert werden durch Subtraktion der vorletzten:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
2x_1 & + & 2x_2 & & & - & 4x_4 & - & 6x_5 & + & 2x_6 & = & 12\\
 & & x_2 & & & + & 5x_4 & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 10\\
 & & & & x_3 & + & 62x_4 & & & & & = & 69\\
 & & & & & & 20x_4 & + & 6x_5 & & & = & 6\\
 & & & & & & & & & & 0 & = & 1\,.
\end{array}$$

Damit wird endgültig klar, daß jede Lösung $(x_1, \ldots, x_6)$ des gegebenen Gleichungssystems insbesondere auch die Gleichung $0 = 1$ erfüllen muß, d.h. die Lösungsmenge ist leer.

Nachdem wir soviel Arbeit in dieses Beispiel investiert haben, sollten wir zumindest einen Teil der Rechnungen recyclen zu einem Beispiel, in dem es Lösungen gibt. Dazu muß nur die letzte der fünf ursprünglichen Gleichungen auf der rechten Seite leicht abgeändert werden: Wir betrachten nun das System

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} & & x_2 & & & + & 5x_4 & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 10\\ 2x_1 & + & 2x_2 & & & - & 4x_4 & - & 6x_5 & + & 2x_6 & = & 12\\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & & & - & 3x_6 & = & 15\\ 4x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & & & + & x_6 & = & 0\\ 6x_1 & - & 6x_2 & + & x_3 & + & 10x_4 & + & 12x_5 & - & x_6 & = & \mathbf{-9}\,. \end{array}$$

Hierauf lassen sich genau dieselben Umformungen anwenden wie oben, anstelle des Systems mit fünfter Gleichung 0 = 1 führen diese nun aber auf

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & & & - & 4x_4 & - & 6x_5 & + & 2x_6 & = & 12\\ & & x_2 & & & + & 5x_4 & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 10\\ & & & & x_3 & + & 62x_4 & & & & & = & 69\\ & & & & & & 20x_4 & + & 6x_5 & & & = & 6\\ & & & & & & & & & & 0 & = & 0\,. \end{array}$$

Diese letzte Gleichung ist natürlich für jedes Tupel $(x_1, \ldots, x_6)$ erfüllt. Die vorletzte gibt eine Beziehung zwischen x_4 und x_5, wir können also

$$x_5 = \alpha \in k$$

beliebig wählen und erhalten dann

$$x_4 = -\frac{3}{10}\alpha + \frac{3}{10}\,.$$

Wenn wir dies in die dritte Gleichung einsetzen, bleibt dort nur noch x_3 als Variable stehen, und aus

$$x_3 - \frac{93}{5}\alpha + \frac{93}{5} = 69$$

lesen wir sofort ab, daß

$$x_3 = \frac{93}{5}\alpha + \frac{252}{5}$$

ist. Damit gehen wir in die zweite Gleichung:

$$x_2 - \frac{7}{5}\alpha + x_6 + \frac{3}{2} = 10\,.$$

Hier können wir wieder eine der beiden noch verbliebenen Variablen auf einen beliebigen Wert setzen, etwa

$$x_6 = \beta \in k\,.$$

Dann wird

$$x_2 = \frac{7}{2}\alpha - \beta + \frac{17}{2}\,,$$

was wir schließlich zusammen mit all den anderen bereits berechneten x_i in die erste Gleichung einsetzen können:

$$2x_1 + \frac{11}{5}\alpha + \frac{79}{5} = 12$$

hat die Lösung

$$x_1 = -\frac{11}{10}\alpha - \frac{19}{10}\,.$$

Damit hängt also die allgemeine Lösung dieses linearen Gleichungssystems von zwei frei wählbaren Parametern α und β ab. Sie wird geringfügig übersichtlicher, wenn wir α als $\alpha = 10\gamma$ schreiben; dann ist $\mathcal{L}$ gleich der Menge

$$\left\{ \left(-11\gamma - \tfrac{19}{10}, 35\gamma - \beta + \tfrac{17}{2}, 186\gamma + \tfrac{252}{5}, -3\gamma + \tfrac{3}{10}, 10\gamma, \beta\right) \,\middle|\, \beta, \gamma \in k \right\}.$$

Als nächstes Beispiel wollen wir ein System betrachten, daß von zwar festen, aber nicht numerisch gegebenen Parametern abhängt: Wir betrachten das Gleichstromnetzwerk aus Abbildung zehn mit bekannten Widerständen $R_1, \ldots, R_5$ und bekanntem Eingangs- und Ausgangsstrom I; gesucht sind die Ströme $I_1, \ldots, I_5$.

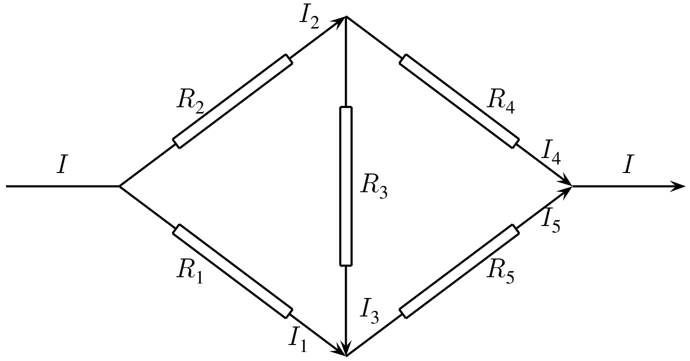


Abb. 10: Ein Gleichstromnetzwerk

Nach den KIRCHHOFFschen Gesetzen müssen sich zunächst an allen Knoten die eingehenden und die ausgehenden Ströme zu Null ergänzen, d.h. wir erhalten die Gleichungen

$$I_1 + I_2 = I = I_4 + I_5$$

für Anfang und Ende sowie

$$I_2 = I_3 + I_4 \quad \text{und} \quad I_1 + I_3 = I_5$$

für oben und unten. Außerdem müssen sich die Spannungen in den beiden Dreiecken zu Null summieren; nach dem OHMschen Gesetz führt dies auf die beiden Gleichungen

$$R_2I_2 + R_3I_3 - R_1I_1 = 0 \quad \text{und} \quad R_3I_3 + R_5I_5 - R_4I_4 = 0\,.$$

Ordnen wir dies nach den Strömen I_ν, erhalten wir also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
I_1 & + & I_2 & & & & & & & = & I \\
 & & & & & & I_4 & + & I_5 & = & I \\
 & & I_2 & - & I_3 & - & I_4 & & & = & 0 \\
I_1 & & & + & I_3 & & & - & I_5 & = & 0 \\
-R_1I_1 & + & R_2I_2 & + & R_3I_3 & & & & & = & 0 \\
 & & & & -R_3I_3 & + & R_4I_4 & - & R_5I_5 & = & 0\,.
\end{array}$$

Die Elimination von I_1 aus allen Gleichungen ab der zweiten ist einfach: Wir müssen die erste Gleichung von der vierten subtrahieren und ihr R_1-faches zur fünften addieren; das neue System ist

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
I_1 & + & I_2 & & & & & & & = & I \\
 & & & & & & I_4 & + & I_5 & = & I \\
 & & I_2 & - & I_3 & - & I_4 & & & = & 0 \\
 & & -I_2 & + & I_3 & & & - & I_5 & = & -I \\
 & & (R_1+R_2)I_2 & + & R_3I_3 & & & & & = & R_1I \\
 & & & & -R_3I_3 & + & R_4I_4 & - & R_5I_5 & = & 0\,,
\end{array}$$

Da I_2 in der zweiten Gleichung nicht vorkommt, vertauschen wir diese mit der dritten; danach können wir letztere zur vierten addieren und ihr (R_1+R_2)-faches von der fünften subtrahieren, um I_2 aus allen weiteren Gleichungen zu eliminieren.

Damit weiterhin jede Gleichung in eine Zeile paßt, setzen wir zur Abkürzung

$$R_{12} \underset{\text{def}}{=} R_1 + R_2 \quad \text{und} \quad R_{123} \underset{\text{def}}{=} R_1 + R_2 + R_3$$

und erhalten

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
I_1 & + & I_2 & & & & & & & = & I \\
 & & I_2 & - & I_3 & - & I_4 & & & = & 0 \\
 & & & & & & I_4 & + & I_5 & = & I \\
 & & & & & & -I_4 & + & -I_5 & = & -I \\
 & & & & R_{123}I_3 & + & R_{12}I_4 & & & = & R_1I \\
 & & & & -R_3I_3 & + & R_4I_4 & - & R_5I_5 & = & 0\,.
\end{array}$$

Zur Elimination von I_3 bietet sich an, die dritte Gleichung, in der I_3 nicht vorkommt, mit der sechsten zu vertauschen (diese hat einen einfacheren I_3-Koeffizienten als die fünfte), und dann das R_{123}/R_3-fache dieser Gleichung zur fünften zu addieren. Dazu müssen wir uns allerdings zunächst überlegen, ob das überhaupt zulässig ist: Falls $R_3 = 0$ ist, dürfen wir natürlich nicht durch R_3 dividieren; wenn dieser Fall nicht ausgeschlossen werden kann, muß er also ab hier getrennt behandelt werden.

Im vorliegenden Beispiel wollen wir aber davon ausgehen, daß alle fünf Widerstände tatsächlich vorhanden sind, so daß alle R_i positive reelle Zahlen sind. Dann können wir durch R_3 dividieren und das System wird zu

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
I_1 & + & I_2 & & & & & & & = & I \\
 & & I_2 & - & I_3 & - & I_4 & & & = & 0 \\
 & & & & -R_3I_3 & + & R_4I_4 & - & R_5I_5 & = & 0 \\
 & & & & & & -I_4 & + & -I_5 & = & -I \\
 & & & & & & \alpha I_4 & + & \beta I_5 & = & R_1I \\
 & & & & & & I_4 & + & I_5 & = & I
\end{array}$$

mit

$$\alpha = R_{12} + \frac{R_4R_{123}}{R_3} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{-R_5R_{123}}{R_3}\,.$$

Schließlich muß noch I_4 aus den letzten beiden Gleichungen eliminiert werden; wir addieren also die vierte Gleichung unverändert zur letzten und ihr α-faches zur vorletzten:

$$\begin{array}{ccccccccc}
I_1 & + & I_2 & & & & & = & I \\
 & & I_2 & - & I_3 & - & I_4 & & = & 0 \\
 & & & & -R_3I_3 & + & R_4I_4 & - & R_5I_5 & = & 0 \\
 & & & & & & -I_4 & + & -I_5 & = & -I \\
 & & & & & & & & (\beta-\alpha)I_5 & = & (R_1-\alpha)I \\
 & & & & & & & & 0 & = & 0
\end{array}$$

Damit können wir nacheinander

$$I_5 = \frac{R_1-\alpha}{\beta-\alpha}\cdot I\,,\qquad I_4 = I - I_5\,,\qquad I_3 = \frac{R_4I_4 - R_5I_5}{R_3}\,,$$
$$I_2 = I_3 + I_4 \qquad \text{und} \qquad I_1 = I - I_2$$

bestimmen, wobei sich der Leser noch überlegen sollte, warum die Division durch $\beta-\alpha$ unproblematisch ist.

Zum Berechnen der Ströme in konkreten Beispielen reicht diese Lösungsformel aus; ist man allerdings an einem symbolischen Ausdruck interessiert, muß man die Definitionen von $\alpha, \beta, R_{12}, R_{123}$ einsetzen und nacheinander alle rechte Seiten auf Ausdrücke nur in I und den R_i reduzieren. Dies ist eine *im Prinzip* einfache Übungsaufgabe in Bruchrechnung, die man allerdings im vorliegenden Fall besser einem Computeralgebrasystem überläßt. Als Ergebnis erhält man die expliziten Formeln

$$I_1 = \frac{(R_2R_5+R_2R_3+R_2R_4+R_3R_4)\cdot I}{R_1R_5+R_2R_5+R_3R_5+R_1R_3+R_2R_3+R_1R_4+R_2R_4+R_3R_4}$$
$$I_2 = \frac{(R_1R_4+R_1R_5+R_3R_5+R_1R_3)\cdot I}{R_1R_5+R_2R_5+R_3R_5+R_1R_3+R_2R_3+R_1R_4+R_2R_4+R_3R_4}$$
$$I_3 = \frac{(R_1R_4-R_2R_5)\cdot I}{R_1R_5+R_2R_5+R_3R_5+R_1R_3+R_2R_3+R_1R_4+R_2R_4+R_3R_4}$$
$$I_4 = \frac{(R_1R_3+R_1R_5+R_2R_5+R_3R_5)\cdot I}{R_1R_5+R_2R_5+R_3R_5+R_1R_3+R_2R_3+R_1R_4+R_2R_4+R_3R_4}$$
$$I_5 = \frac{(R_2R_3+R_1R_4+R_2R_4+R_3R_4)\cdot I}{R_1R_5+R_2R_5+R_3R_5+R_1R_3+R_2R_3+R_1R_4+R_2R_4+R_3R_4}\,,$$

die für die meisten *konkreten* Anwendungen erheblich weniger nützlich sind als die obige Form des Ergebnisses.

Als letztes Beispiel schließlich betrachten wir ein Beispiel, das von einem Parameter abhängt, in dem man aber *nicht* wie im obigen Beispiel einfach durch Ausdrücke im Parameter dividieren darf. (Eigentlich hätten wir es da auch nicht immer dürfen, aber wir haben einfach angenommen, daß alle Widerstände wirklich vorhanden und damit positiv sind; da Kurzschlüsse immer wieder vorkommen, ist diese Annahme nicht unbedingt realistisch.) Das Gleichungssystem hänge ab von einem Paramter $a \in k$ und habe die Form

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & 1 \\
x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\
-2x_1 & - & 2ax_2 & - & ax_3 & = & 1\,.
\end{array}$$

Ein Computeralgebrasystem findet unschwer die Lösung

$$x_1 = \frac{a^2-3a-1}{a^2-3a+2},\qquad x_2 = \frac{3}{a^2-3a+2},\qquad x_3 = \frac{-3}{a-2}\,.$$

Diese „Lösung“ hat aber für $a=2$ und auch für $a=1$ Nullen im Nenner, ist dort also nicht erklärt. Für ein Computeralgebrasystem ist das kein Problem: Wie der Name sagt, rechnet es *algebraisch,* und da ist a keine reelle Zahl, sondern ein Symbol, das nichts mit irgendwelchen Zahlen zu tun hat. Damit ist $a-2$ ein formaler Ausdruck, der nie null sein kann, denn das *Symbol* a ist schließlich verschieden von der *Zahl* zwei.

Dieses Rechnen in sogenannten Funktionenkörpern ist mathematisch problemlos, ist aber nicht das, was in den meisten Anwendungen gefragt ist: Dort steht a im allgemeinen für eine variable Größe, in Abhängigkeit von der das Gleichungssystem gelöst werden soll. Man kann sich beispielsweise vorstellen, daß das Gleichungssystem ein lineares Regelungsproblem beschreibt in Abhängigkeit von steuerbaren Größen x_1, x_2 und x_3, wobei die zu steuernden Größen zu

$$x_1 + ax_2 + x_3,\qquad x_1 + x_2 \quad \text{und} \quad -2x_1 - 2ax_2 - ax_3$$

werden. Der Paramter a wäre dann zu interpretieren als eine von außen vorgegebene Umgebungsbedingung (z.B. die Temperatur), und das lineare Gleichungssystem besagt, daß wir das System so regeln wollen, daß die drei steuerbaren Größen allesamt eins werden – unabhängig von der Außentemperatur.

Bei einer solchen Interpretation können wir natürlich *nicht* einfach durch $a-2$ dividieren; ein Ergebnis, wie $x_3 = -3/(a-2)$ besagt in so einem Fall, daß das Ziel im Falle $a=2$ nicht erreichbar ist, und das ist ein sehr wichtiges Ergebnis. Bei einem System, das einen Stromkreis beschreibt, könnte das zum Beisiel bedeuten, daß beim Parameterwert $a=2$ ein Kurzschluß entsteht, so daß dieser Parameterwert unbedingt verhindert werden muß. Deshalb muß man bei einem Gleichungssystem, das ein reales Problem beschreibt, vor jeden Division durch einen parameterabhängigen Ausdruck garantieren, daß dieser Ausdruck von null verschieden ist, und man muß die Fälle, in denen er null wird, gesondert diskutieren.

Im vorliegenden Beispiel (einer Vordiplomsaufgabe vom April 1999) führt dies auf folgende Lösung:

Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten sowie Addition der zweifachen ersten Gleichung zur dritten ergibt

$$\begin{aligned} (a-1)x_2 + x_3 &= 0 \\ (2-a)x_3 &= 3\,. \end{aligned}$$

Für $a=2$ ist die letzte dieser beiden Gleichungen unlösbar, ansonsten ist

$$x_3 = \frac{3}{2-a} \quad \text{falls} \quad a \neq 2\,.$$

Für $a=1$ wird die vorletzte Gleichung zu $x_3 = 0$, was der schon gefundenen Lösung

$$x_3 = \frac{3}{2-a} = 1$$

widerspricht; auch dann ist also das Gleichungssystem unlösbar. In allen anderen Fällen erhalten wir

$$x_2 = \frac{3}{(a-1)(a-2)} \quad \text{falls} \quad a \neq 1,2\,.$$

Schließlich läßt sich noch, beispielsweise aus der zweiten Gleichung des ursprünglichen Systems, x_1 berechnen und wir erhalten als Ergebnis: Die

Lösungsmenge ist

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(1 - \frac{3}{(a-1)(a-2)},\ \frac{3}{(a-1)(a-2)},\ \frac{3}{a-2} \right) \right\}\ ,\ \text{falls } a \neq 1,2$$

und

$$\mathcal{L} = \emptyset\ ,\ \text{falls } a = 1 \text{ oder } a = 2$$

ist.

In einem solchen Fall wird man durch die Nullstellen des Nenners gewarnt, daß hier etwas schiefgehen muß; es gibt aber auch Beispiele, in denen ein Computeralgebrasystem Lösungen schlichtweg „übersieht“: Bertrachten wir etwa das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & & & 2x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 9 \\ & - & x_2 & + & ax_3 & = & a+2\,. \end{array}$$

Ein Computer findet leicht die Lösung

$$x = 7, \quad y = -2 \quad \text{und} \quad z = 1\,.$$

Der GAUSSalgorithmus führt uns aber über das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & & & 2x_3 & = & 9 \\ & & 3x_2 & - & 3x_3 & = & -9 \\ & - & x_2 & + & ax_3 & = & a+2 \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & & & 2x_3 & = & 9 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & -3 \\ & - & x_2 & + & ax_3 & = & a+2 \end{array}$$

auf die Endgestalt

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & & & 2x_3 & = & 9 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & -3 \\ & & & & (a-1)x_3 & = & a-1\,, \end{array}$$

in der man nur für $a \neq 1$ aus der letzten Gleichung schließen darf, daß $z = 1$ ist; für $a = 1$ haben wir die immer erfüllte Gleichung $0z = 0$. Die Lösungsmenge ist hier also

$$\mathcal{L} = \{(7, -2, 1)\} \quad \text{für } a \neq 1$$

und
$$\mathcal{L} = \left\{(-2\lambda+9, \lambda-3, \lambda) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{für } a = 1\,.$$

Jemand, der Maple hinreichend gut kennt, hätte natürlich auch diese vollständige Lösung damit ermitteln können, aber der einfachstmögliche Befehl reicht definitiv nicht aus – zumindest ein Grund, warum man auch heute noch lernen muß, lineare Gleichungssysteme von Hand zu lösen.

Ein anderer Grund, warum speziell Technische Informatiker das lernen müssen, liegt in der Natur vieler Anwendungen: Lineare Gleichungssysteme müssen beispielsweise gelöst werden bei Steuerungs- und Regelungsproblemen. In vielen Fällen wird diese Steuerung nicht von einem leistungsfähigen Universalrechner durchgeführt, sondern von einer eigens dafür entwickelten Schaltung, die mit möglichst wenig Aufwand arbeiten soll – sei es aus Kostengründen oder wegen des Raumbedarfs oder der Wärmeentwicklung. In solchen Fällen geht es dann darum, die Lösung möglichst effizient zu ermitteln, und bei der Definition des Wortes „effizient" können hier durchaus aus nichtmathematische Gesichtspunkte eine Rolle spielen. Daher ist es wichtig, das volle Instrumentarium der Lösungstheorie linearer Gleichungssysteme zu beherrschen, um die jeweils beste Methode implementieren zu können. Deshalb werden wir auch noch Alternativen zum GAUSS-Algorithmus betrachten, und in der *Numerik I* werden weitere Verfahren folgen.

f) Lösbarkeitskriterien für lineare Gleichungssysteme

Nach diesen Beispielen ist es an der Zeit, wieder zu den theoretischen Grundlagen zurückzukehren. Sei also wieder
$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2\\
\vdots \qquad\qquad &= \vdots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n\,,
\end{aligned}$$
ein allgemeines lineares Gleichungssystem. Wenn wir die a_{ij} zu einer

Matrix
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm}\end{pmatrix}$$
zusammenfassen und die Unbekannten und rechten Seiten zu Vektoren
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix} \quad\text{und}\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix},$$
läßt sich das Gleichungssystem auch kurz als $A\vec{x} = \vec{b}$ schreiben, wenn wir das Produkt der Matrix A mit dem Vektor $\vec{x}$ so definieren, daß es jener Vektor aus k^n sein soll, dessen i-te Komponente die Summe
$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j$$
sein soll. Identifiziert man Vektoren aus k^m mit $m \times 1$-Matrizen, si ist das gerade das Produkt der $n \times m$-Matrix A mit der $m \times 1$-Matrix der Variablen.

Wir bezeichen A als die *Matrix des Gleichungssystems* und
$$\left(A \;\middle|\; \vec{b}\,\right) \underset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_m\end{pmatrix}$$
als die *erweiterte Matrix.*

Damit können wir das Gleichungssystem in die Sprache der Vektorräume und linearen Abbildungen übersetzen: Wir betrachten die lineare Abbildung
$$\varphi\colon k^m \to k^n;\quad \vec{v} \mapsto A\vec{v}\,,$$
und die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems ist
$$\mathcal{L} = \left\{\vec{v} \in k^m \;\middle|\; \varphi(\vec{v}) = \vec{b}\right\}.$$