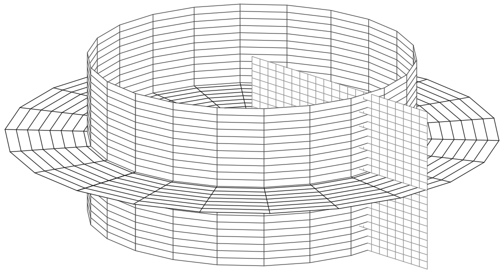

Abb. 34: Flächen mit konstantem $r, \varphi$ und $z$ für Zylinderkoordinaten

ist

$$f_x = F_r \cos\varphi - \frac{F_\varphi}{r} \sin\varphi$$
$$f_y = F_r \sin\varphi + \frac{F_\varphi}{r} \cos\varphi$$
$$f_z = F_z$$

und

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = F_{rr} + \frac{F_r}{r} + \frac{F_{\varphi\varphi}}{r^2} + F_{zz} .$$

***3) Kugelkoordinaten:*** Hier führen wir zusätzlich zu den beiden Polarkoordinaten der Ebenen als dritte Koordinate noch eine *Winkelkoordinate* $\vartheta$ ein, wir haben also drei Koordinaten $(r, \varphi, \vartheta)$, wobei $r$ wieder positiv sein muß und den Abstand vom Nulpunkt bezeichnet.

Im Gegensatz zur Konvention der Geographen, wonach der Äquator, d.h. der Schnittkreis einer Kugel um den Nullpunkt mit der $(x, y)$-Ebenen, die Breite Null hat, ist es in der Mathematik, Physik und Technik üblich, dem Äquator die Koordinate $\vartheta = \pi/2$ zu geben, dem „Nordpol", d.h. dem Schnittpunkt mit der positiven $z$-Achse, $\vartheta = 0$ und dem Südpol $\vartheta = \pi$. In der $(x, z)$-Ebene ist also

$$x = r \sin\vartheta \quad \text{und} \quad z = r \cos\vartheta ,$$

in der $(y, z)$-Ebene

$$y = r \sin\vartheta \quad \text{und} \quad z = r \cos\vartheta ,$$



und ganz allgemein ist

$$R = r \sin\vartheta \quad \text{und} \quad z = r \cos\vartheta ,$$

wobei $R$ den Abstand eines Punktes von der $z$-Achse bezeichnet.

Für einen Punkt im Abstand $R$ von der $z$-Achse ist

$$x = R \cos\varphi \quad \text{und} \quad y = R \sin\varphi ,$$

zusammen mit den obigen Formeln erhalten wir also als Zusammenhang zwischen Kugelkoordinaten und kartesischen Koordinaten

$$x = r \cos\varphi \sin\vartheta$$
$$y = r \sin\varphi \sin\vartheta$$
$$z = r \cos\vartheta .$$

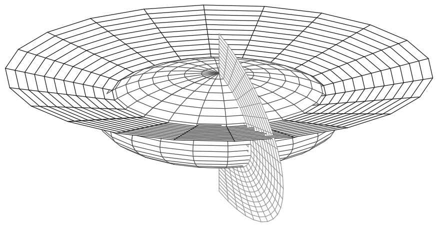

Abb. 35: Flächen mit konstantem $r, \varphi$ und $\vartheta$ für Kugelkoordinaten

Die Flächen mit konstantem $r$ sind hier natürlich Kugeln, konstantes $\varphi$ führt wie bei den Zylinderkoordinaten auf Halbebenen, und die Flächen mit konstantem $\vartheta$ schließlich sind Kegel um die $z$-Achse.

Wieder können wir einer Funktion $f(x, y, z)$ in kartesischen Koordinaten durch

$$F(r, \varphi, \vartheta) \underset{\text{def}}{=} f(r \cos\varphi \sin\vartheta, r \sin\varphi \sin\vartheta, r \cos\vartheta)$$

eine neue Funktion zuordnen und durch Anwendung der Kettenregel sowie Lösen eines linearen Gleichungssystems die partiellen Ableitungen zueinander in Beziehung setzen; die Vorgehensweise ist im wesentlichen wie bei den ebenen Polarkoordinaten, nur daß wir jetzt ein System aus drei linearen Gleichungen bekommen:

$$\begin{aligned} F_r &= f_x \cos\varphi \sin\vartheta + f_y \sin\varphi \sin\vartheta + f_z \cos\vartheta \\ \frac{F_\varphi}{r} &= -f_x \sin\varphi \sin\vartheta + f_y \cos\varphi \sin\vartheta \\ \frac{F_\vartheta}{r} &= f_x \cos\varphi \cos\vartheta + f_y \sin\varphi \cos\vartheta - f_z \sin\vartheta\,. \end{aligned}$$

Der GAUSS-Algorithmus führt schnell auf die Lösung

$$\begin{aligned} f_x &= F_r \cos\varphi \sin\vartheta - \frac{F_\varphi \sin\varphi}{r\sin\vartheta} + \frac{F_\vartheta \cos\varphi\cos\vartheta}{r} \\ f_y &= F_r \sin\varphi \sin\vartheta - \frac{F_\varphi \cos\varphi}{r\sin\vartheta} + \frac{F_\vartheta \sin\varphi\cos\vartheta}{r} \\ f_z &= F_r \cos\vartheta - \frac{F_\vartheta \sin\vartheta}{r}\,. \end{aligned}$$

Im Prinzip genauso können auch die zweiten Ableitungen berechnet werden; eine grausame, wenn auch nicht sonderlich schwierige Rechnung ergibt, daß beispielsweise

$$\begin{aligned} \Delta f &= f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} \\ &= F_{rr} + \frac{2F_r}{r} + \frac{F_{\varphi\varphi}}{r^2\sin^2\vartheta} + \frac{F_{\vartheta\vartheta}}{r^2} + \frac{F_\vartheta}{r^2\tan\vartheta} \end{aligned}$$

ist.

Als Beispiel wollen wir damit noch einmal die Divergenz des elektrischen Felds einer Ladung $q$ im Nullpunkt berechnen: Diese erzeugt ein Potential

$$U(r,\varphi,\vartheta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,,$$

das Feld ist $\vec{E} = -\operatorname{grad} U$ und

$$\operatorname{div}\vec{E} = -\operatorname{div}\operatorname{grad} U = -\Delta U = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{r^3} + \frac{2}{r}\cdot\frac{-1}{r^2}\right) = 0\,.$$



## §5: Kurvenintegrale im $\mathbb{R}^n$

Bislang hatten wir uns nur mit der *Differential*rechnung im $\mathbb{R}^n$ beschäftigt; es wird langsam Zeit, uns auch der *Integral*rechnung zuzuwenden. In diesem Paragraphen werden die Mengen, über die integriert wird, noch eindimensional sein, d.h. also Kurven. Entsprechende Integrale benötigt man einerseits, Bogenlängen von Kurven zu bereichen, vor allem aber sind sie wichtig, um die aufzuwendende oder freiwerdende Energie bei der Bewegung eines Objekts in einem Kraftfeld (oder einem elektrisch geladenen Teilchens in einem elektrischen Feld *usw.*) zu berechnen. Wir beginnen mit dem einfachsten Fall:

### a) Die Bogenlänge einer Kurve

In der Integralrechnung wird die Fläche unterhalb einer Kurve dadurch definiert, daß man sie durch Rechtecke angenähert; falls deren Gesamtfläche bei immer feiner werdenden Unterteilungen gegen einen festen Grenzwert konvergiert, bezeichnetet man diesen als Fläche unterhalb der Kurve oder auch als RIEMANN-Integral über die die Kurve beschreibende Funktion.

Nichts spricht dagegen, bei der Definition der Bogenlänge genauso vorzugehen: Die primitiven Bausteine, mit denen wir die Kurve annähern, sind nun natürlich keine Rechtecke mehr, sondern Strecken; am einfachsten nehmen wir dazu Tangentenvektoren. Dazu brauchen wir allerdings Differenzierbarkeit, wir müssen uns also zunächst auf ein Kurven*stück* beschränken.

Sei also $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Kurvenstück; wir unterteilen das Intervall, wie wir es vom RIEMANN-Integral her gewohnt sind, durch Zwischenpunkte

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$$

und wählen in jedem Teilintervall $(t_i, t_{i+1})$ einen Zwischenpunkt $\tau_i$. Der Tangentenvektor im Punkt $\tau_i$ ist nach Definition $\dot\gamma(\tau_i)$, allerdings ist das nicht unbedingt der Vektor, den wir wollen: Wir wollen schließlich die Kurve durch ihre Tangente annähern, und dazu müssen wir die Länge an das Intervall anpassen, über dem wir die Kurve approximieren wollen. Indem wir den Vektor $\dot\gamma(\tau_i)$ der Differentialquotienten

$$\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\cdot\overrightarrow{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})}=\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\begin{pmatrix}\gamma_1(t_{i+1})-\gamma_1(t_i)\\ \vdots\\ \gamma_n(t_{i+1})-\gamma_n(t_i)\end{pmatrix}$$

approximieren sehen wir, daß der Vektor $\overrightarrow{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})}$ ungefähr gleich

$$\dot\gamma(\tau_i)\cdot(t_{i+1}-t_i)$$

ist, die Bogenlänge der Kurve kann also angenähert werden durch

$$\sum_{i=0}^{N-1}\left\|\dot\gamma(\tau_i)\right\|\cdot(t_{i+1}-t_i)\,.$$

Für die Kreislinie mit ihrer Parametrisierung $t\mapsto(\cos t,\sin t)$ ist dies in den Abbildungen 36 und 37 dargestellt für eine äquidistante Unterteilung des Intervalls $[0,2\pi]$ in zwanzig *bzw.* fünfzig Teilintervalle; im letzteren Fall ist in der Tat kaum mehr ein Unterschied zu sehen zwischen der Kreislinie und den fünfzig Vektoren, durch die sie approximiert wird.

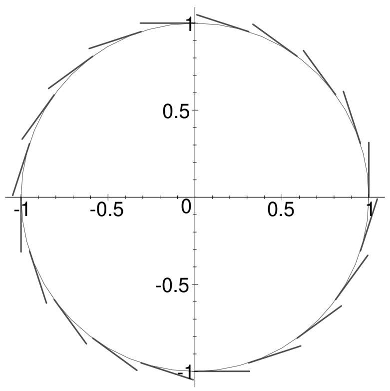


Abb. 36: Bogenlänge des Einheitskreises angenähert durch zwanzig Strecken

Da $\gamma$ nach Definition eines Kurvenstücks stetig differenzierbar ist, ist auch $\left\|\dot\gamma(t)\right\|$ immerhin noch eine stetige und damit insbesondere



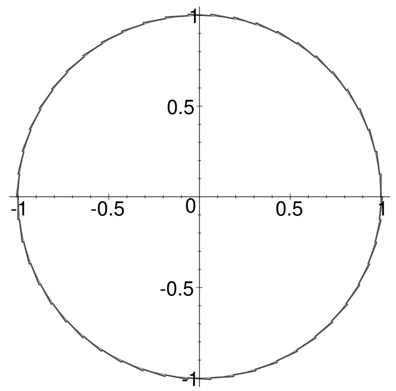


Abb. 37: Bogenlänge des Einheitskreises angenähert durch fünfzig Strecken

RIEMANN-integrierbare Funktion; wir wissen also, daß der Grenzwert für immer enger werdende Verfeinerungen der Unterteilung existiert und gleich dem Integral über diese Funktion ist. Somit kommen wir auf ganz natürliche Weise auf die

**Definition:** *a)* Die Bogenlänge eines Kurvenstücks $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$ ist

$$\int_a^b\left\|\dot\gamma(t)\right\|dt\,.$$

*b)* Die Bogenlänge einer Kurve $\gamma$, bestehend aus den Kurvenstücken $\gamma_1,\dots,\gamma_r$ ist die Summe der Bogenlängen der Kurvenstücke $\gamma_i$.

Um zu sehen, ob das alles wirklich vernünftig ist, berechnen wir die Bogenlänge der Kreislinie

$$\gamma_1\colon[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2;\quad t\mapsto(\cos t,\sin t)\,.$$

Hier ist

$$\dot\gamma_1(t)=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix},\quad\text{also}\quad\left\|\dot\gamma_1(t)\right\|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}=1\,,$$

und damit ist die Bogenlänge

$$\int_0^{2\pi} \|\dot\gamma_1(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi ,$$

wie erwartet; zumindest für diese Parametrisierung ist also alles vernünftig.

Alternativ hatten wir die Kreislinie auch parametrisiert durch

$$\gamma_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto \left( \frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1} \right) ;$$

hier ist die Bogenlänge im Sinne obiger Definition nicht erklärt, jedoch können wir natürlich $\gamma_3$ auf endliche Intervalle einschränken und diese immer größer werden lassen; falls ein Grenzwert existiert, bekommen wir also hier die Bogenlänge als uneigentliches Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|\dot\gamma_3(t)\|\, dt .$$

Berechnen wir zunächst die Ableitung von $\gamma_3$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right) = \frac{(t^2+1)\cdot 2t - (t^2-1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2} = \frac{4t}{(t^2+1)^2}$$

und

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2t}{t^2+1}\right) = \frac{(t^2+1)\cdot 2 - 2t\cdot 2t}{(t^2+1)^2} = \frac{-2(t^2-1)}{(t^2+1)^2} ,$$

d.h.

$$\|\dot\gamma_3(t)\| = \frac{\sqrt{(4t)^2+4(t^2-1)^2}}{(t^2+1)^2} = \frac{2\sqrt{(t^2+1)^2}}{(t^2+1)^2} = \frac{2}{t^2+1} .$$

Wie Abbildung 38 zeigt, ist diese Annäherung der Kreislinie durch Strecken erheblich unregelmäßiger als die obige, aber beim Übergang zu immer feiner werdenden Unterteilungen gehen natürlich trotzdem alle



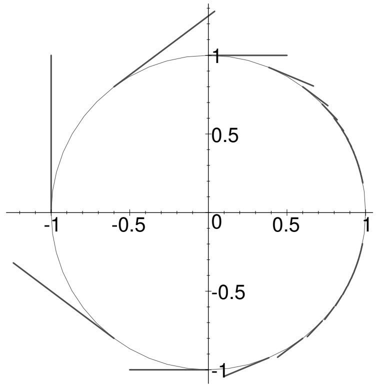


Abb. 38: Approximation durch Strecken in der rationalen Parametrisierung

Streckenlängen gegen null. (Eingezeichnet sind die Strecken zu einer Unterteilung des Intervalls $[-10, 10]$ in Teilintervalle der Länge $1/2$.)

Die Bogenlänge ist somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\, dt}{t^2+1} = 2 \arctan t \Big|_{-\infty}^{\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) = 2\pi ;$$

auch bei dieser Parametrisierung erhalten wir also dasselbe Ergebnis, wie dies aus geometrischen Gründen auch sein muß: Die Bogenlänge ist schließlich eine Eigenschaft einer Kurve, nicht einer speziellen Parametrisierung der Kurve.

Ganz so einfach ist die Sache allerdings nun doch nicht: Schließlich parametrisiert auch

$$\gamma_4 \colon [0, 20\pi] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

die Kreislinie, aber nun ist die Bogenlänge

$$\int_0^{20\pi} \|\dot\gamma_4(t)\|\, dt = \int_0^{20\pi} dt = 20\pi .$$

Auch das erscheint geometrisch durchaus sinnvoll: Wenn man nicht nur einmal, sondern zehnmal im Kreise herum geht, legt man schließlich einen zehnmal so langen Weg zurück.

Wir müssen also etwas sorgfältig sein, wenn wir präzisieren wollen, was die Unabhängigkeit der Bogenlänge von der Parametrisierung wirklich bedeuten soll; da das ganze dadurch auch etwas umfangreicher wird, sei das entsprechende Lemma in den nächsten Abschnitt verschoben, wo wir es gleich etwas allgemeiner beweisen werden.

## b) Integration eines Vektorfelds längs einer Kurve

Die Hauptanwendung von Kurvenintegralen besteht nicht darin, die Längen aller möglicher Kurven zu berechnen; der Hauptgrund, warum wir solche Integrale betrachten, ist die Berechnung der aufzuwendenden oder freiwerdenden Energie bei der Bewegung eines Teilchens in einem Kraftfeld *bzw.* – im Fall eines elektrisch geladenen Teilchens – eines elektromagnetischen Felds.

Gehen wir der Einfachheit halber aus von einem Kraftfeld $\vec{F}(\boldsymbol{x})$ und einem Teilchen, das sich entlang eines Kurvenstücks $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ durch dieses Feld bewegt, d.h. der Vektor $\vec{F}\big(\gamma(t)\big)$ sei für alle $t$ aus $[a,b]$ definiert. Im Punkt $\gamma(t)$ greift dann also der Kraftvektor $\vec{F}\big(\gamma(t)\big)$ an; die Arbeit, die das Teilchen verrichten muß oder gewinnt, ist das Skalarprodukt aus Kraftvektor und (Tangential-)Vektor des Wegs.

Um die Gesamtarbeit zunächst näherungsweise auszurechen, unterteilen wir wie gewohnt das Intervall $[a,b]$ durch Zwischenpunkte

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$$

und wählen in jedem Teilintervall $(t_i, t_{i+1})$ einen Punkt $\tau_i$. Zwischen den Punkten $\gamma(t_i)$ und $\gamma(t_{i+1})$ approximieren wir die Kurve wie im vorigen Abschnitt durch den Tangentenvektor $\dot\gamma(\tau_i)\cdot(t_{i+1}-t_i)$, die Arbeit kann dann angenähert werden durch

$$\sum_{i=0}^{N-1} \vec{F}\big(\gamma(\tau_i)\big)\cdot\dot\gamma(\tau_i)$$



Da $\gamma$ nach Definition eines Kurvenstücks stetig differenzierbar ist, ist $\vec{F}\big(\gamma(t)\big)\cdot\dot\gamma(t)$ für ein stetiges Vektorfeld eine stetige und damit insbesondere RIEMANN-integrierbare Funktion; wir wissen also, daß der Grenzwert für immer enger werdende Verfeinerungen der Unterteilung existiert und gleich dem Integral über diese Funktion ist.

**Definition:** *a)* $\vec{V} \in \mathcal{C}^0(D,\mathbb{R}^n)$ sei ein stetiges Vektorfeld auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, und $\gamma\colon [a,b] \to D$ sei ein Kurvenstück. Das Integral über $\vec{V}$ entlang $\gamma$ ist

$$\int_\gamma \vec{V}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \underset{\text{def}}{=} \int_a^b \vec{V}\big(\gamma(t)\big)\cdot\dot\gamma(t)\,dt\,.$$

*b)* Das Integral über $\vec{V}$ entlang einer Kurve $\gamma$ ist die Summe der Integrale über $\vec{V}$ entlang der Kurvenstücke, aus denen $\gamma$ zusammengesetzt ist.

Noch allgemeiner können wir ausgehen von einer beliebigen stetigen Funktion $f\colon C \to \mathbb{R}$ auf dem Bild $C = \gamma\big([a,b]\big)$ des Kurvenstücks $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und diese entlang $\gamma$ integrieren. Als Motivation könnte man sich etwa vorstellen, daß $\gamma$ eine materielle Kurve ist und $f\big(\gamma(t)\big)$ die (lineare) Massendichte im Punkt $\gamma(t)$ angibt, oder $\gamma$ könnte den Weg eines Teilchens durch eine Flüssigkeit mit räumlich variabler Viskosität beschreiben *usw.*

Wenn wir wieder von derselben Unterteilung wie oben ausgehen und das Kurvenstück durch eine Folge von Tangentenvektoren approximieren, müssen wir hier die Summen

$$\sum_{i=0}^{N-1} f\big(\gamma(\tau_i)\big)\,\big\|\dot\gamma(\tau_i)\big\|$$

betrachten, und diese konvergieren wegen der Stetigkeit von $f$ gegen

$$\int_\gamma f(\boldsymbol{x})\,ds \underset{\text{def}}{=} \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\big\|\dot\gamma(t)\big\|\,dt\,.$$

Analog definieren wir auch das Integral über eine *Kurve* $\gamma$.

**Definition:** $\int\limits_\gamma f(x)\,ds$ heißt RIEMANN-STIELTJES-Integral über $f$ entlang $\gamma$.

($ds$ steht hier für das Bogenelement der Kurve, wobei der Buchstabe $s$ wohl vom lateinischen *spatium* = Entfernung kommen dürfte.)

Der niederländische Mathematiker THOMAS JAN STIELTJES (1856–1894) studierte in Leiden, schwänzte dort aber viele Vorlesungen um stattdessen die Werke von GAUSS und JACOBI zu lesen. Obwohl er bei seinen Prüfungen dreimal durchfiel, wurde er Assistent am Observatorium von Leiden, dessen Direktor ein Freund seines Vaters war. 1883 heiratete er und wechselte unter anderem auf Betreiben seiner Frau von der Astronomie zur Mathematik. Nachdem eine Berufung nach Groningen an seinem fehlenden Hochschulabschluß gescheitert war, übersiedelte er 1885 nach Frankreich, wo er Professor an der Universität Toulouse wurde und bis an sein Lebensende blieb. Seine Arbeiten befassen sich vor allem mit Verbindungen zwischen der Zahlentheorie und der Analysis; das RIEMANN-STIELTJES-Integral wurde in einer Arbeit über Kettenbrüche eingeführt.

Dieses RIEMANN-STIELTJES-Integral wird im Spezialfall $f \equiv 1$ zur Bogenlänge, und für ein reguläres Kurvenstück $\gamma$ ohne Selbstschnitte wird es für

$$f\big(\gamma(t)\big) = \frac{\vec{V}\big(\gamma(t)\big)\cdot\dot\gamma(t)}{\big\|\dot\gamma(t)\big\|}$$

zum Integral entlang $\gamma$ über das Vektorfeld $\vec{V}$. (Falls sich die Kurve $\gamma$ selbst schneidet, wie etwa eine 8, ist $\dot\gamma(t)$ im Schnittpunkt eventuell nicht nur vom Punkt $\gamma(t)$ abhängig, sondern vom Parameter $t$, so daß wir dann nicht in der Situation von RIEMANN-STIELTJES sind. Meist ist dies jedoch kein Problem, denn wenn so etwas nur endlich oft vorkommt, können wir die Kurve $\gamma$ in endlich viele Kurvenstücke zerlegen, deren jedes die Voraussetzung erfüllt.)

Natürlich gelten auch für RIEMANN-STIELTJES-Integrale die üblichen, aus der klassischen Integralrechung bekannten Rechenregeln: Da wir Kurvenintegrale als spezielle RIEMANN-Integrale definiert haben, sind dies in der Tat einfach Spezialfälle der dortigen Regeln. Wir haben also,



zum Beispiel, wieder die *Monotonieregel*

$$\int\limits_\gamma f(x)\,ds \le \int\limits_\gamma g(x)\,ds \quad \text{falls } f(x) \le g(x) \text{ für jeden Punkt auf } \gamma,$$

die *Linearität*seigenschaft

$$\int\limits_\gamma (\alpha f + \beta g)\,ds = \alpha\int\limits_\gamma f\,ds + \beta\int\limits_\gamma g\,ds\,,$$

und für *Zusammensetzungen* gilt

$$\int\limits_{\gamma+\delta} f\,ds = \int\limits_\gamma f\,ds + \int\limits_\delta f\,ds\,,$$

wobei $\gamma+\delta$ jene Kurve bezeichne, deren erste Kurvenstücke die Kurve $\gamma$ definieren, während die restlichen die Bestandteile von $\delta$ sind.

Schließlich haben wir auch noch einen

**Mittelwertsatz:** Für jedes Kurvenstück $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und jede stetige Funktion $f$ auf $\gamma([a,b])$ gibt es einen Parameterwert $\tau \in [a,b]$, so daß gilt

$$\int\limits_\gamma f\,ds = f(\tau)\cdot \textit{Bogenlänge von } \gamma\,.$$

*Beweis:* Dies ist einfach der gewöhnliche Mittelwertsatz der Integralrechnung, angewandt auf die Funktion

$$t \mapsto f\big(\gamma(t)\big)\cdot\dot\gamma(t)\,.$$

■

Es ist hier nicht wesentlich, daß $\gamma$ als Kurven*stück* vorausgesetzt war; ein einfaches Argument mit dem Zwischenwertsatz zeigt, daß der Mittelwertsatz auch für Kurven gilt. Wesentlich ist dagegen die Stetigkeit von $f$, denn da der der Mittelwertsatz der Integralrechnung nur für stetige Funktionen gilt, können wir ihn nur anwenden, wenn $f\big(\gamma(t)\big)$ stetig ist. Ein einfaches Gegenbeispiel zum Mittelwertsatz wäre eine Kurve aus zwei gleichlangen Komponenten, auf deren einer $f$ konstant gleich eins ist, während es auf der anderen verschwindet. Nach dem Mittelwertsatz, angewandt auf die beiden Komponenten, folgt, daß der Mittelwert über die gesamte Kurve gleich 1/2 ist, aber dieser Wert wird von $f$ nirgends angenommen.

Als nächstes kommen wir zu der angekündigten Unabhängigkeit des Kurvenintegrals von der Parametrisierung der Kurve. Da diese, wie wir am Beispiel der mehrfach durchlaufenenen Kreislinie gesehen haben, nicht ganz uneingeschränkt gilt, müssen wir zunächst definieren, was wir meinen:

**Definition:** Zwei Kurvenstücke $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\delta\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ heißen äquivalent, wenn es eine bijektive stetig differenzierbare Abbildung $\varphi\colon [a,b] \to [c,d]$ gibt mit $\varphi(a) = c$ und $\varphi(b) = d$ derart, daß $\delta \circ \varphi = \gamma$ ist, d.h. für alle $x \in [a,b]$ ist $\delta\big(\varphi(x)\big) = \gamma(x)$.

Dese Definition stellt insbesondere sicher, daß $\gamma\big([a,b]\big)$ und $\delta\big([c,d]\big)$ dieselbe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ sind, so daß die beiden Kurven als Punktmengen übereinstimmen; durch die geforderte Bijektivität von $\varphi$ ist aber auch sichergestellt, daß die Kurve bei beiden Parametrisierungen gleich oft durchlaufen wird. Daher erwarten wir

**Lemma:** $\gamma\colon [a,b] \to D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\delta\colon [c,d] \to D \subseteq \mathbb{R}^n$ seien äquivalente Kurvenstücke, und $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Dann ist

$$\int_\gamma f(\boldsymbol{x})\,ds = \int_\delta f(\boldsymbol{x})\,ds\,.$$

Der *Beweis* ist eine einfache Anwendung der Kettenregel und der Substitutionsregel: Nach Definition der Äquivalenz gibt es eine bijektive stetig differenzierbare Funktion $\varphi$ mit $\varphi(a) = c$ und $\varphi(b) = d$, so daß $\gamma = \delta \circ \varphi$ und damit $\dot\gamma = (\dot\delta \circ \varphi) \cdot \dot\varphi$ ist. Offensichtlich muß $\varphi$ monoton wachsen, also ist $\dot\varphi(t)$ nirgends negativ und somit gleich seinem Betrag.



Nach der Substitutionsregel ist

$$\int_\gamma f(\boldsymbol{x})\,ds = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,|\dot\gamma(t)|\,dt = \int_a^b f\Big(\delta\big(\varphi(t)\big)\Big)\,\Big|\dot\delta\big(\varphi(t)\big)\Big|\,\dot\varphi(t)\,dt$$

$$= \int_c^d f\big(\delta(t)\big)\,\Big|\dot\delta(t)\Big|\,dt = \int_\delta f(\boldsymbol{x})\,ds\,.$$

■

## c) Zirkulationsfreie und konservative Vektorfelder

Wir haben Kurvenintegrale über Vektorfelder eingeführt, um die Energie zu beschreiben, die zur Bewegung eines Teilchens durch ein Kraftfeld (oder ein elektromagnetisches Feld) aufgewendet werden muß oder dabei frei wird. Das gerade bewiesene Lemma zeigt, daß diese (Gesamt-)Energie nur vom Weg des Teilchens abhängt, nicht aber beispielsweise von seiner Geschwindigkeit. Wie aus der Physik bekannt ist, hängt aber beispielsweise bei reibungsfreier Bewegung eines Teilchens in einem mechanischen Kraftfeld der Weg nicht einmal von der Kurve ab, sondern nur von deren Anfangs- und Endpunkt oder, genauer gesagt, vom der potentiellen Energie des Anfangs- und des Endpunkts. Insbesondere verschwindet also das Integral längs einer jeden geschlossenen Kurve. In diesem Abschnitt wollen wir Vektorfelder mit dieser Eigenschaft genauer untersuchen.

**Definition:** *a)* Ein Vektorfeld $\vec V\colon D \to \mathbb{R}^n$ heißt *zirkulationsfrei,* wenn für jede geschlossene Kurve $\gamma$ in $D$ gilt:

$$\int_\gamma \vec V\,ds = 0\,.$$

*b)* Das Vektorfeld $\vec V$ heißt *konservativ,* wenn es eine differenzierbare Funktion $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ gibt, so daß $\vec V = \operatorname{grad}\varphi$ ist. $\varphi$ heißt *Stammfunktion* von $\vec V$ und $-\varphi$ *Potentialfunktion.*

Zum Verständnis des Begriffs *konservativ* betrachten wir ein Beispiel aus der Physik: Ein Teilchen mit konstanter Masse $m$ bewege sich durch das Gravitationsfeld

$$\vec{F} = -\operatorname{grad}\left(G\frac{Mm}{r}\right)$$

eines Himmelskörpers oder, allgemeiner, durch irgendein Potentialfeld $\vec{F} = -\operatorname{grad} U$. Nach dem zweiten NEWTONschen Gesetz gilt dann für die Bahn $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ des Teilchens mit der Zeit $t$ als Parameter

$$\vec{F}\big(\gamma(t)\big) = m\ddot{\gamma}(t)\,,$$

d.h. die im Punkt $\gamma(t)$ wirkende Kraft ist gleich der Masse des Teilchens mal seiner Beschleunigung. Also ist in jedem Punkt $\gamma(t)$

$$m\ddot{\gamma}(t) + \operatorname{grad} U\big(\gamma(t)\big) = 0\,.$$

Um aus dieser Vektorgleichung eine skalare Beziehung abzuleiten, bilden wir das Skalarprodukt mit dem Geschwindigkeitsvektor $\dot{\gamma}(t)$:

$$\begin{aligned} 0 &= m\ddot{\gamma}(t)\cdot\dot{\gamma}(t) + \operatorname{grad} U\big(\gamma(t)\big)\cdot\dot{\gamma}(t) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\gamma}(t)\cdot\dot{\gamma}(t) + U\big(\gamma(t)\big)\right) \end{aligned}$$

nach Produkt- und Kettenregel. Also ist

$$E = \frac{m\big\|\dot{\gamma}(t)\big\|^2}{2} + U\big(\gamma(t)\big)$$

konstant, und das ist der klassische Energieerhaltungssatz: Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie ist eine zeitlich unveränderliche Erhaltungsgröße.

Der Name „konservativ“ kommt vom lateinischen *conservare* = erhalten; der Grund für das negative Vorzeichen der Potentialfunktion liegt darin, daß der Gradient in Richtung des stärksten *Anstiegs* einer Funktion zeigt, wohingegen die Natur versucht, ein System zum Energie*minimum* zu bringen, so daß die Kräfte in Gegenrichtung zum Gradienten wirken.

Wie zu erwarten, sind die beiden Begriffe *konservativ* und *zirkulationsfrei* nicht unabhängig voneinander; tatsächlich werden wir gleich sehen, daß sie sogar äquivalent sind. Aus technischen Gründen wollen uns uns dabei, auch wenn es nicht unbedingt nötig wäre, auf sogenannte *zusammenhängende* Mengen beschränken:



**Definition:** Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *zusammenhängend,* wenn es zu je zwei Punkten $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$ eine Kurve $\gamma$ gibt mit Anfangspunkt $\boldsymbol{x}$ und Endpunkt $\boldsymbol{y}$.

Diese Definition fordert zwar genau das, was wir gleich brauchen werden, sie ist aber nicht die übliche Definition einer zusammenhängenden Menge: In der Analysis wie auch in der Topologie bezeichnet man eine Menge $D$ dann als zusammenhängend, wenn sie nicht als disjunkte Vereinigung zweier offener Teilmengen von $D$ geschrieben werden kann; dies ist im allgemeinen eine schwächere Bedingung als die hier geforderte. Für eine offene Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sind die beiden Definitionen aber äquivalent:

Sei nämlich $D_0$ die Menge aller Punkte aus der offenen Menge $D$, die mit dem Punkt $\boldsymbol{x}_0 \in D$ durch einen Weg verbunden werden können. Dann ist $D_0$ offen, denn für $\boldsymbol{x}_1 \in D_0$ gibt es wegen der Offenheit von $D$ eine $\varepsilon$-Umgebung von $\boldsymbol{x}_1$, die ganz in $D$ liegt. Da jeder Punkt dieser $\varepsilon$-Umgebung durch eine Strecke mit dem Mittelpunkt $\boldsymbol{x}_1$ verbunden werden kann, liegt auch diese Umgebung in $D_0$, d.h. $D_0$ ist offen.

Aber auch das Komplement von $D_0$ in $D$ ist offen, denn auch für einen Punkt $\boldsymbol{x}_2 \in D \setminus D_0$ enthält $D$ eine $\varepsilon$-Umgebung. Läge diese nicht ganz in $D \setminus D_0$, gäbe es dort einen Punkt $\boldsymbol{x}_3$, der durch einen geeigneten Weg mit $\boldsymbol{x}_0$ verbunden werden könnte. Da aber $\boldsymbol{x}_3$ durch eine Strecke mit $\boldsymbol{x}_2$ verbunden werden kann, gäbe dann auch einen Weg von $\boldsymbol{x}_2$ nach $\boldsymbol{x}_0$, im Widerspruch zur Annahme. Also ist $D \setminus D_0$ offen.

Damit ist $D$ also Vereinigung der offenen und disjunkten Teilmengen $D_0$ und $D \setminus D_0$; wenn $D$ zusammenhängend ist, geht das nur, wenn eine der beiden Mengen leer ist. $D_0$ enthält den Punkt $\boldsymbol{x}_0$, also ist $D \setminus D_0 = \emptyset$ und somit $D = D_0$. Also kann jeder Punkt aus $D$ durch einen Weg mit $\boldsymbol{x}_0$ verbunden werden, und damit ist $D$ zusammenhängend im Sinne der obigen Definition.

Der folgdende Satz zeigt die Äquivalenz der Begriffe *konservativ* und *zirkulationsfrei;* wegen seiner zweiten Aussage kann er als das mehrdimensionale Analogon des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechung aufgefaßt werden.

**Satz:** Für ein Vektorfeld $\vec{V}\colon D \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen zusammenhängenden Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

*1.)* $\vec{V}$ ist konservativ.

*2.)* Es gibt eine Funktion $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$, so daß für jede Kurve $\gamma$ in $D$ gilt:

$$\int_\gamma \vec{V} \cdot ds = \varphi\big(\gamma(b)\big) - \varphi\big(\gamma(a)\big)$$

hängt nur von den Endpunkten von $\gamma$ ab.

*3.)* $\vec{V}$ ist zirkulationsfrei.

*Beweis:* 1.) $\Rightarrow$ 2.): Falls $\vec{V}$ konservativ ist, gibt es eine Stammfunktion $\varphi$ auf $D$, so daß $\vec{V} = \operatorname{grad}\varphi$ ist. Für eine Kurve $\gamma\colon [a,b] \to D$ ist daher nach der Kettenregel

$$\int_\gamma \vec{V} \cdot ds = \int_a^b \vec{V}\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot\gamma(t)\, dt = \int_a^b \operatorname{grad}\varphi\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot\gamma(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\varphi\big(\gamma(t)\big)\, dt = \varphi\big(\gamma(b)\big) - \varphi\big(\gamma(a)\big)\,.$$

Damit ist das Integral, genau wie wir es vom Eindimensionalen gewohnt sind, einfach gleich der Differenz der Werte der Stammfunktion am Endpunkt und am Anfangspunkt der Kurve.

2.) $\Rightarrow$ 3.): Diese Implikation ist klar, denn wenn der Wert des Integrals nicht von der Kurve abhängt, ist das Integral längs einer geschlossenen Kurve gleich dem Integral längs der zu einem Punkt degenerierten Kurve, und das ist natürlich gleich Null.

3.) $\Rightarrow$ 2.): Zumindest anschaulich ist auch hier klar, was wir machen: Wir durchlaufen zunächst die Kurve $\gamma$ in der üblichen Weise und dann die Kurve $\delta$ „rückwärts". Dies ergibt eine geschlossene Kurve $\widetilde{\gamma}$, auf die wir *3.)* anwenden können.

Konkret sei für ein Kurvenstück $\delta_i\colon [c_i, d_i] \to \mathbb{R}^n$ von $\delta$

$$\delta_i^*\colon [c_i, d_i] \to \mathbb{R}^n; \quad t \mapsto \delta(c_i + d_i - t)$$

das rückwärts durchlaufene Kurvenstück zu $\delta_i$; ist $r$ die Anzahl der $\delta_i$, so bestehe die Kurve $\delta^*$ aus den Kurvenstücken $\delta_r^*, \dots, \delta_1^*$. Da $\gamma$ und $\delta$ dieselben Anfangs- und Endpunkte haben, ist der Endpunkt von $\delta^*$ gleich dem Anfangspunkt von $\gamma$ und umgekehrt; die Folge von Kurvenstücken $\gamma_1, \dots, \gamma_s, \delta_r^*, \dots, \delta_1^*$ ist deshalb eine geschlossene Kurve $\widetilde{\gamma}$. Nach Voraussetzung verschwindet das Integral längs einer solchen Kurve, d.h.



$$0 = \int_{\widetilde{\gamma}} \vec{V}\, ds = \int_\gamma \vec{V}\, ds + \int_{\delta^*} \vec{V}\, ds = \int_\gamma \vec{V}\, ds - \int_\delta \vec{V}\, ds\,,$$

und damit sind die Integrale über $\gamma$ und $\delta$ gleich.

2) $\Rightarrow$ 1): $\boldsymbol{x}_0$ sei irgendein beliebig ausgewählter Punkt von $D$. Da $D$ zusammenhängend ist, gibt es dann für jeden Punkt $\boldsymbol{x} \in D$ eine Kurve $\gamma_{\boldsymbol{x}}$ mit Anfangspunkt $\boldsymbol{x}_0$ und Endpunkt $\boldsymbol{x}$.

Wir definieren nun einen Kandidaten für eine Stammfunktion durch

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \int_{\gamma_{\boldsymbol{x}}} \vec{V}\, ds\,;$$

wegen der Voraussetzung *2)* hängt $\varphi(\boldsymbol{x})$ in der Tat nur von $\boldsymbol{x}$ ab und nicht von der Wahl des Wegs $\gamma_{\boldsymbol{x}}$.

Für einen hinreichend kleinen Vektor $\vec{h}$ liegt auch die Verbindungsstrecke von $\boldsymbol{x}$ mit $\boldsymbol{x}+\vec{h}$ in $D$ und kann durch eine Kurve $\eta$ parametrisiert werden; dann ist

$$\varphi(\boldsymbol{x}+\vec{h}) - \varphi(\boldsymbol{x}) = \int_{\gamma_{\boldsymbol{x}+\vec{h}}} \vec{V}\, ds - \int_{\gamma_{\boldsymbol{x}}} \vec{V}\, ds = \int_\eta \vec{V}\, ds\,.$$

Speziell für einen Vektor $\vec{h} = h\vec{e}_i$ der Länge $h$ in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e}_i$ der Koordinatenachse $x_i$ ist

$$\int_\eta \vec{V}\, ds = \int_\eta V_i\, dx_i = \int_0^h V_i(\boldsymbol{x} + t\vec{e}_i)\, dt\,,$$

und damit

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(\boldsymbol{x}+h\vec{e}_i) - \varphi(\boldsymbol{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h V_i(\boldsymbol{x} + t\vec{e}_i)\, dt = V_i(\boldsymbol{x})$$

nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer reellen Veränderlichen. Dies zeigt, daß $\operatorname{grad}\varphi = \vec{V}$ ist und das Vektorfeld somit eine Stammfunktion hat. ∎

Im $\mathbb{R}^3$ sollten wir erwarten, daß es noch eine vierte äquivalente Charakterisierung konservativer Vektorfelder gibt: Da die Zirkulationsfreiheit mit Drehungen um eine Achse zusammenhängt, sollte für solche Felder auch die Rotation verschwinden. Diese Richtung ist trivial:

**Lemma:** Für ein zirkulationsfreies Vektorfeld $\vec{V}: D \to \mathbb{R}^3$ auf $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ist $\operatorname{rot}\vec{V} \equiv 0$ auf $D$.

*Beweis:* Nach dem gerade bewiesenen Satz ist ein zirkulationsfreies Vektorfeld konservativ, und nach den Rechenregeln aus §4*f)* gilt mit der Stammfunktion $\varphi$ von $\vec{V}$

$$\operatorname{rot}\vec{V} = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0\,.$$

∎

Die umgekehrte Richtung allerdings ist zumindest in dieser Allgemeinheit falsch. Als **Gegenbeispiel** betrachten wir das Magnetfeld eines geradlinigen stromdurchflossenen Leiters, d.h. also das Vektorfeld

$$\vec{V}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi(x^2+y^2)}\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix}\,.$$

Wie wir in §4*e2)* gesehen haben, verschwindet seine Rotation im gesamten Definitionsbereich des Vektorfelds, d.h. überall außerhalb der $z$-Achse.

Trotzdem ist das Vektorfeld nicht zirkulationsfrei, denn für den Einheitskreis

$$\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3;\, t \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$$



ist

$$\int_\gamma \vec{V}\,ds = \int_0^{2\pi} \vec{V}\big(\gamma(t)\big)\dot\gamma(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix}dt$$
$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\,.$$

Der Grund für dieses Verhalten liegt, wie wir bald sehen werden, darin, daß $\vec{V}$ auf der $z$-Achse nicht definiert ist: Obwohl die $z$-Achse im Vergleich zum gesamten $\mathbb{R}^3$ nur einen – sollte man meinen – vernachlässigbar geringen Teil ausmacht, genügt selbst diese minimale Definitionslücke, um die Umkehrung des Lemmas falsch zu machen.

## §6: Mehrdimensionale Integrationstheorie

Die bisher betrachteten Kurvenintegrale waren alle zurückführbar auf gewöhnliche RIEMANN-Integrale über Funktionen einer reellen Veränderlichen. Mit ihrer Hilfe ist es möglich, die Länge von Kurven zu bestimmen, nicht aber Flächeninhalte oder Volumen von höherdimensionalen geometrischen Gebilden. Deren Berechnung, sowie die von naheliegenden Verallgemeinerungen wie dem Fluß durch die Oberfläche eines Bereichs sind Gegenstand dieses Paragraphen.

### a) Flächeninhalte und Volumina

Beginnen wir mit Flächeninhalten und Volumina. Bereits das gewöhnliche RIEMANN-Integral kann als Flächeninhalt interpretiert werden, allerdings nur für die Fläche zwischen der $x$-Achse und einer Kurve zwischen zwei gegebenen $x$-Koordinaten. Hier soll es nun um beliebige Flächen im $\mathbb{R}^2$, Volumina im $\mathbb{R}^3$ und die entsprechenden höherdimensionalen Konzepte gehen.

Bei der Definition des RIEMANN-Integrals wird die Fläche unterhalb der Kurve durch Rechtecke angenähert, deren Kantenlänge in $x$-Richtung immer kleiner wird, während die Kantenlänge in $y$-Richtung durch die

$y$-Koordinaten der Kurve $y = f(x)$ gegeben war. Im allgemeinen Fall, wo es keine ausgezeichnete Richtung mehr gibt, wird diese Unterscheidung zwischen $x$- und $y$-Richtung offensichtlich sinnlos; die einzig mögliche Verallgemeinerung des RIEMANN-Integrals besteht darin, daß man eine Fläche durch *beliebige* Rechtecke annähert und beim Grenzübergang *beide* Seiten gegen Null gehen läßt.

Ganz entsprechend müssen für dreidimensionale Bereiche Quader betrachtet werden, deren drei Seiten mit Verfeinerung der Überdeckung immer kleiner werden, *usw.*

Formal gehen wir dazu wie folgt vor: Wir wählen ein festes Koordinatensystem im $\mathbb{R}^n$ und betrachten Quader $Q_i \subset \mathbb{R}^n$, deren Kanten parallel zu denn Koordinatenachsen sind. (Für $n = 2$ sind diese „Quader“ natürlich Rechtecke, und für $n = 1$ Intervalle.) Das Volumen eines solchen Quaders soll gleich dem Produkt seiner Kantenlängen sein, genau wie wir es aus der Elementargeometrie gewohnt sind.

**Definition:** Eine *Elementarmenge* in $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$, die als Vereinigung endlich vieler Quader mit achsenparallelen Kanten geschrieben werden kann; dabei dürfen sich zwei Quader höchstens in gemeinsamen Randpunkten schneiden.

Im $\mathbb{R}^2$ wäre also beispielsweise jede Menge, deren Rand auf kariertem Papier so gezeichnet werden kann, daß alle Linien auf Karokanten liegen, eine Elementarmenge.

Das Volumen $\mu(E)$ einer Elementarmenge $E$ definieren wir als die Summe der Volumina der endlich vielen Quader, aus denen die Menge besteht; man überlegt sich leicht, daß es unabhängig von der Art der Zerlegung der Menge in Quader ist.

Nun gehen wir im wesentlichen genauso vor, wie bei der Definition des RIEMANN-Integrals: Dort hatten wir die Fläche unterhalb einer Kurve $y = f(x)$ sowohl von oben als auch von unten durch Rechtecke angenähert; die Flächen der entsprechenden Elementarmengen hatten wir als RIEMANNsche Unter- *bzw.* Obersummen bezeichnet. Das Integral existierte nach Definition genau dann, wenn bei immer weiterer Verfeinerung der Überdeckung die Untersummen und die Obersummen gegen einen gemeinsamen Grenzwert konvergierten.



Entsprechend betrachten wir zur Definition des Volumens einer Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ Elementarmengen, die ganz in $B$ enthalten sind und bezeichnen den Grenzwert bei immer feiner werdenden Quader als *unteres Volumen* $\underline{\mu}(B)$. Zur exakten Definition verwenden wir besser nicht einen Grenzwert, da es etwas umständlich wäre, hier zu definieren, über was genau wir den Grenzwert bilden, sondern wir definieren $\underline{\mu}(B)$ einfach als *Supremum* der Volumina aller Elementarmengen, die in $B$ liegen:

$$\underline{\mu}(B) \underset{\text{def}}{=} \sup\bigl\{\mu(E) \bigm| E \subseteq B \text{ Elementarmenge}\bigr\} ,$$

falls dieses Supremum existiert. (Es existiert offensichtlich genau dann, wenn die Menge $B$ beschränkt ist; für unbeschränkte Mengen wie etwa den gesamten $\mathbb{R}^n$ ist die Menge aller $\mu(E)$ unbeschränkt, so daß kein Supremum existiert.)

Genauso definieren wir ein oberes Volumen $\overline{\mu}(B)$ als *Infimum* der Volumina aller Elementarmengen, die $B$ enthalten:

$$\overline{\mu}(B) \underset{\text{def}}{=} \inf\bigl\{\mu(E) \bigm| E \supseteq B \text{ Elementarmenge}\bigr\} ,$$

falls dieses Infimum existiert. (Auch hier ist die Existenz wieder an die Beschränktheit von $B$ gekoppelt, denn für ein unbeschränkte Menge $B$ gibt es keine Elementarmenge, die $B$ enthält, so daß wir das Infimum über die leere Menge bilden müßten.)

Die Abbildungen 39 und 40 zeigen die Annäherung einer Kreisfläche durch Elementarmengen von innen und außen; Abbildung 41 zeigt entsprechende Elementarmengen für eine Halbkugel.

Die Definition des Volumens ist nun fast selbstverständlich:

**Definition:** Wir sagen, die Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ habe das Volumen $\mu(B)$, falls das untere Volumen $\underline{\mu}(B)$ und das obere Volumen $\overline{\mu}(B)$ beide existieren und gleich $\mu(B)$ sind.

Ganz entsprechend können wir auch Integrale über Funktionen definieren: $f : D \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion auf der Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, und

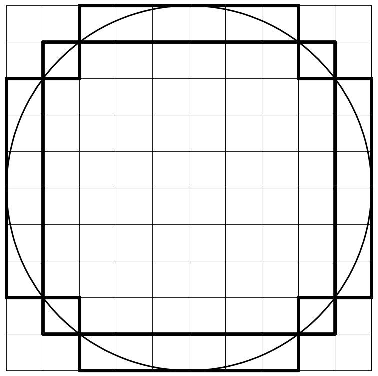

Abb. 39: Approximation einer Kreisfläche auf $10 \times 10$ Quadraten

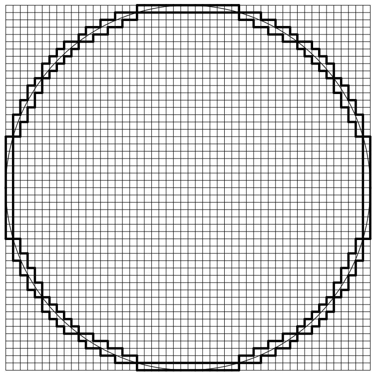

Abb. 40: Approximation einer Kreisfläche auf $50 \times 50$ Quadraten

$B \subseteq D$ sei eine Teilmenge von $D$. Dann können wir wieder RIEMANNsche Untersummen definieren, indem wir eine Elementarmenge $E \subseteq D$ betrachten, bestehend etwa aus den Quadern $Q_1, \ldots, Q_N$, und dazu die RIEMANNsche Untersumme definieren als

$$\sum_{i=1}^{N} \mu(Q_i) \cdot \inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in Q_i\} .$$



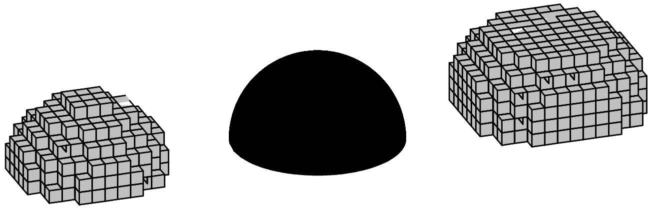

Abb. 41: Approximation einer Halbkugel durch Würfel

Die RIEMANNsche Obersumme für die Elementarmenge $E' \supseteq B$ bestehend aus den Quadern $Q'_1, \ldots, Q'_M$ ist entsprechend

$$\sum_{j=1}^{M} \mu(Q'_j) \cdot \sup\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in Q_j\} ,$$

und wir definieren

**Definition:** $\underset{B}{\int \cdots \int} f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \ldots dx_n$ existiert, wenn das Supremum der Menge aller RIEMANNscher Untersummen gleich dem Infimum der Menge aller RIEMANNscher Obersummen ist; dieser gemeinsame Wert ist der Wert des Integrals.

Die Schreibweise $\underset{B}{\int \cdots \int} f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \ldots dx_n$ soll dabei bedeuten, daß wir $n$ Integralzeichen schreiben, für $B \subset \mathbb{R}^2$ also

$$\iint_B f(x, y)\, dx\, dy$$

und für $B \subset \mathbb{R}^3$

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz .$$

(Nicht alle Lehrbücher verwenden bei der mehrdimensionalen Integration mehrere Integralzeichen; einige, wie etwa **[D]**, schreiben unabhängig von der Dimension immer nur ein Integralzeichen. In Physik und Technik scheint die Schreibweise mit mehreren Integralzeichen üblicher zu sein, deshalb verwenden wir diese Konvention.)

Integrale und Volumina sind natürlich eng miteinander verwandt: Einerseits läßt sich das Volumen eines Bereichs $B$ auch als

$$\mu(B) = \int\limits_B \cdots \int 1\, dx_1 \cdots dx_n$$

schreiben, andererseits ist, völlig analog zur Flächeninterpretation des RIEMANN-Integrals, für eine auf $B$ nichtnegative Funktion $f$

$$\int\limits_B \cdots \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n =$$

$$\mu\left(\left\{(x_1,\dots,x_n,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \begin{matrix} (x_1,\dots x_n) \in B \text{ und} \\ 0 \le y \le f(x_1,\dots,x_n) \end{matrix}\right\}\right) .$$

Auch für das so definierte mehrdimensionale Integral gelten aus offensichtlichen Gründen die Analoga der aus aus der eindimensionalen Integralrechnung bekannten Rechenregeln wie die *Monotonieregel*

$$\int\limits_B \cdots \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n \le \int\limits_B \cdots \int g(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n ,$$

falls $f(\boldsymbol{x}) \le g(\boldsymbol{x})$ für alle $\boldsymbol{x} \in B$, und die *Linearität*seigenschaft

$$\int\limits_B \cdots \int \big(\alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta g(\boldsymbol{x})\big)\, dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \alpha \int\limits_B \cdots \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n + \beta \int\limits_B \cdots \int g(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n .$$

Außerdem haben wir wieder einen

**Mittelwertsatz:** Für einen zusammenhängenden abgeschlossenen und beschränkten Bereich $B \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetige Funktion $f\colon B \to \mathbb{R}$ gibt es einen Punkt $\boldsymbol{x}_0 \in B$, so daß gilt

$$\int\limits_B \cdots \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n = f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \mu(B) .$$



Der *Beweis* geht ganz genauso wie in $\mathbb{R}$: Eine stetige Funktion nimmt auf einem abgeschlossenen Intervall sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum an; genauso zeigt man, daß eine stetige Funktion auf einer beschränkten abgeschlossen Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ ihr Maximum und ihr Minimum annimmt. Sei etwa $\boldsymbol{x}_1 \in B$ ein Punkt, in dem $f$ minimal wird, und $\boldsymbol{x}_2$ einer, in dem $f$ maximal wird. Dann ist für jedes $\boldsymbol{x} \in B$

$$f(\boldsymbol{x}_1) \le f(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x}_2) ;$$

nach der Monotonieregel ist daher

$$\int\limits_B \cdots \int f(\boldsymbol{x}_1)\, dx_1 \cdots dx_n = f(\boldsymbol{x}_1) \cdot \mu(B)$$

kleiner oder gleich

$$\int\limits_B \cdots \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n ,$$

was wiederum kleiner oder gleich

$$\int\limits_B \cdots \int f(\boldsymbol{x}_2)\, dx_1 \cdots dx_n = f(\boldsymbol{x}_2) \cdot \mu(B)$$

ist. Damit gibt es eine Zahl $\eta$ zwischen $f(\boldsymbol{x}_1)$ und $f(\boldsymbol{x}_2)$, so daß

$$\int\limits_B \cdots \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n = \eta \cdot \mu(B)$$

ist. Wir müssen noch zeigen, daß dieses $\eta$ ein Funktionswert von $f$ auf $B$ ist. Dazu verbinden wir $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{x}_2$ durch eine Kurve $\gamma$; indem wir nötigenfalls die Parameterintervalle der Kurvenstücke von $\gamma$ verschieben, können wir annehmen, daß $\gamma$ durch ein zusammenhängendes Parameterintervall $[a,\, b]$ parametrisiert wird. Wegen der Stetigkeit von $f$ haben wir dann eine stetige Funktion

$$\varphi\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto f\big(\gamma(t)\big)$$

mit $\varphi(a) = f(\boldsymbol{x}_1)$ und $\varphi(b) = f(\boldsymbol{x}_2)$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es dazu ein $\tau \in [a,\, b]$ mit $\varphi(c) = \eta$; mit $\boldsymbol{x}_0 = \gamma(\tau)$ ist also $f(\boldsymbol{x}_0) = \eta$. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

■

Wie beim gewöhnlichen (eindimensionalen) RIEMANN-Integral ist die Existenz von mehrdimensionalen Integralen normalerweise kein Problem, allerdings kann man natürlich leicht Beispiele konstruieren, für die das Integral nicht existiert. Wir können etwa in Analogie zur DIRICHLETschen Sprungfunktion die Menge

$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x,y \in \mathbb{Q} \text{ und } 0 \le x,y \le 1 \right\}$$

aller Punkte mit rationalen Koordianten im Einheitsquadrat betrachten. Da $\mathbb{Q}$ keine reellen Intervalle enthält, sind alle Rechtecke, die ganz in $B$ enthalten sind, zu Punkten degeneriert. Eine in $B$ enthaltene Elementarmenge besteht also aus endlich vielen Punkten und hat somit den Flächeninhalt null. Eine Elementarmenge, die ganz $B$ enthält, muß aber das gesamte Einheitsquadrat enthalten, da die rationalen Punkte dort dicht liegen; sie hat also mindestens die Fläche eins. Somit ist eins der obere und null der untere Flächeninhalt von $B$; der Flächeninhalt von $B$ existiert also nicht.

Die folgende Überlegung liefert ein Kriterium für die Existenz des Volumens einer Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$: Die Differenzmenge zwischen einer Elementarmenge, die $B$ enthält, und einer Elementarmenge, die in $B$ enthalten ist, kann offenbar wieder als Elementarmenge aufgefaßt werden und enthält den Rand von $B$. Je besser die äußere und die innere Elementarmenge $B$ annähern, desto weniger unterscheidet sich diese Differenzmenge vom Rand; die Existenz eines Volumens von $B$ ist daher äquivalent dazu, daß das Volumen des Rands von $B$ existiert und verschwindet.

Für eine *unbeschränkte* Menge $B$ können wir bislang weder Volumen noch Integrale definieren, denn unsere Konstruktion ist nur anwendbar, wenn $B$ in einer Elementarmenge enthalten ist. Das ist allerdings nichts neues, denn beim eindimensionalen RIEMANN-Integral tritt genau das gleiche Problem auf und wird dadurch gelöst, daß man *uneigentliche* Integrale einführt: Beispielsweise ist

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx\,,$$

falls dieser Grenzwert existiert. Genauso definieren wir jetzt



**Definition:** $B \subseteq \mathbb{R}^n$ sei eine unbeschränkte Menge und die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei in einer $B$ umfassenden Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ erklärt. Wir sagen, das *uneigentliche Integral*

$$\int\cdots\int_B f(\boldsymbol{x})\,dx_1\cdots dx_n$$

existiere, wenn für jede Folge

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_i \subset \cdots$$

von beschränkten Mengen $B_i$ mit $\bigcup_{i\ge1} B_i = B$ der Grenzwert

$$\lim_{i\to\infty} \int\cdots\int_{B_i} f(\boldsymbol{x})\,dx_1\cdots dx_n$$

existiert, und wenn er für jede solche Folge denselben Wert hat. Diesen gemeinsamen Wert bezeichnen wir als den Wert des uneigentlichen Integrals.

Wie auch im Eindimensionalen genügt es hier nicht, nur eine einzige Folge von Mengen $B_i$ zu betrachten; ansonsten könnte man beispielsweise dem uneigentlichen Integral

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \sin x \sin y\,dx\,dy$$

je nachdem, ob man für die $B_i$ Quadrate nimmt, in deren Eckpunkten der Cosinus für beide Koordinaten verschwindet, oder Quadrate, in deren Eckpunkten die beiden Cosinus einen konstanten anderen Wert haben, dem Integral die verschiedensten Werte zuordnen. Tatsächlich aber existiert dieses uneigentliche Integral natürlich genauso wenig wie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx$ im Eindimensionalen.

Für interessantere Beispiele sei auf den nächsten Abschnitt verwiesen, wo wir

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

berechnen werden.

## b) Integration über Normalbereiche

Der Grund dafür, daß wir bislang noch keine interessanten Beispiele für mehrdimensionale Integrale haben, liegt natürlich darin, daß man Werte von Integralen fast nie durch Anwendung der Definition bestimmt. Im Eindimensionalen wird stattdessen meist den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung benutzt, über den die Berechnung eines Integrals auf die (nicht immer explizit mögliche) Bestimmung einer Stammfunktion zurückgeführt wurde; hier, im Mehrdimensionalen, wollen wir die Integration soweit wie möglich auf mehrfache eindimensionale Integration zurückführen. Zumindest in einem Fall wissen wir schon, wie das geht: Ist die Funktion $f$ auf dem Intervall $[a, b]$ nichtnegativ, so hat

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leq x \leq b \text{ und } 0 \leq y \leq f(x)\right\}$$

die Fläche

$$\iint_B dx\,dy = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Auch den Flächeninhalt der etwas komplizierteren Menge

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leq x \leq b \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x)\right\}$$

läßt sich, wenn $g(x) \leq h(x)$ ist für alle $x \in [a, b]$, durch das eindimensionale Integral

$$\iint_B dx\,dy = \int_a^b \big(h(x) - g(x)\big)\,dx$$

ausdrücken. Ähnliche Formeln gelten auch nach Vertauschung der Rollen von $x$ und $y$.

**Definition:** Eine Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt *Normalbereich vom Typ I,* wenn es reelle Zahlen $a \leq b$ und stetig differenzierbare Funktionen $g, h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt mit $g(x) \leq h(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so daß

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leq x \leq b \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x)\right\}$$



ist. $B$ heißt *Normalbereich vom Typ II,* wenn es reelle Zahlen $c \leq d$ und stetig differenzierbare Funktionen $g, h\colon [c, d] \to \mathbb{R}$ gibt mit $g(y) \leq h(y)$ für alle $y \in [a, b]$, so daß

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; c \leq y \leq d \text{ und } g(y) \leq x \leq h(y)\right\}.$$

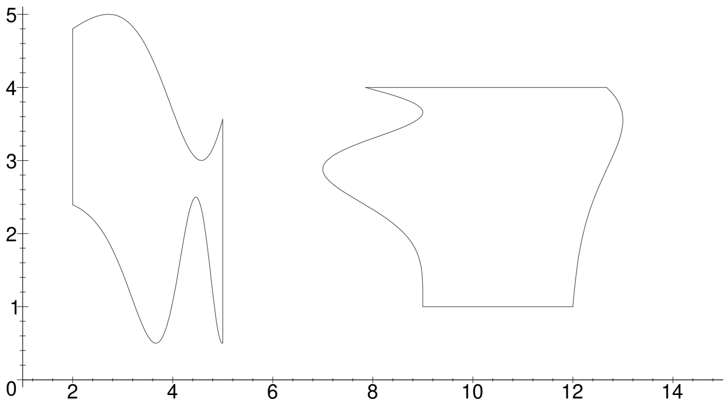


Abb. 42: Normalbereiche vom Typ I und II

Für diese Normalbereiche können wir nicht nur die Fläche leicht ausrechnen, sondern auch beliebige Integrale über stetige Funktionen:

**Satz:** $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$.
*a)* Für einen Normalbereich $B \subseteq D$ vom Typ I ist

$$\iint_B f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\,dy\right) dx\,.$$

*b)* Für einen Normalbereich $B \subseteq D$ vom Typ II ist

$$\iint_B f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\,dx\right) dy\,.$$

*Beweis:* Wir wissen bereits, daß der Flächeninhalt von $B$ existiert; da $f$ eine stetige Funktion ist, folgt dann auch ohne größere Schwierigkeiten die Existenz des Integrals von $f$ über $B$. Wir wollen darauf nicht genauer eingehen, sondern nur benutzen, daß es dann ausreicht, spezielle Folgen von Elementarmengen zu betrachten. Eine solche spezielle Folge erhalten wir etwa dadurch, daß wir den ganzen $\mathbb{R}^2$ mit einem Quadrategitter überziehen; die Seitenlänge der Quadrate sei $k = \frac{b-a}{N}$ und ihr Flächeninhalt dementsprechend gleich $k^2$.

Da die Aussage *b)* durch Vertauschung der beiden Koordinaten in *a)* übergeht, reicht es, den Satz für Normalbereiche vom Typ I zu beweisen.

Als in $B$ enthaltene Elementarmenge $E_N$ wählen wir die Menge aller Quadrate, die ganz in $B$ liegen; als $B$ enthaltende Elementarmenge $E'_N$ entsprechend die Menge aller Quadrate, die nichtleeren Durchschnitt mit $B$ haben. Wir numerieren die Quadrate in $E_N$ und $E'_N$ mit zwei Indizes: Das Intervall $[a,b]$ wird durch das Quadrategitter in $N-1$ Teilintervalle der Länge $k$ zerlegt; das Quadrat $Q_{ij}$ liege über dem $i$-ten dieser Teilintervalle und sei, von unter her gesehen, das $j$-te Quadrat, das ganz in $B$ liegt. Die Anzahl der ganz in $B$ liegenden Quadrate im $i$-ten Streifen sei $r_i$; dann ist die RIEMANNsche Untersumme zu $E_N$ gleich

$$\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{r_i}\mu(Q_{ij})\cdot\inf_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y) = \sum_{i=1}^{N-1}\left(\sum_{j=1}^{r_i}\inf_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y)\cdot k\right)\cdot k\,.$$

Für die RIEMANNsche Obersumme müssen wir alle Quadrate betrachten, die mit $B$ nichtleeren Durchschnitt haben; dabei treten im allgemeinen auch Quadrate $Q_{ij}$ unterhalb von $Q_{i1}$ auf, für deren Bezeichnung wir Indizes $j \le 0$ verwenden.

Im $i$-ten Streifen mögen die $Q_{ij}$ mit $s_i \le j \le t_i$ auftreten; dann ist die RIEMANNsche Obersumme gleich

$$\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=s_i}^{t_i}\mu(Q_{ij})\cdot\sup_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y) = \sum_{i=1}^{N-1}\left(\sum_{j=s_i}^{t_i}\sup_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y)\cdot k\right)\cdot k\,.$$

Da $f$ als stetige Funktion RIEMANN-integrierbar ist, konvergieren für



$N\to\infty$ und damit $k\to 0$

$$\sum_{j=1}^{r_i}\inf_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y)\cdot k \quad\text{und}\quad \sum_{j=s_i}^{t_i}\sup_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y)\cdot k$$

beide gegen

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\,;$$

die RIEMANNschen Unter- und Obersummen daher entsprechend gegen

$$\int_a^b\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\right)dx\,,$$

wie behauptet. ■

Als erstes Beispiel berechnen wir zur Kontrolle etwas Altbekanntes, die Fläche der Einheitskreisscheibe

$$B = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2\le 1\right\},$$

die wir hier umständlich als

$$\iint_B dx\,dy$$

ausrechnen wollen.

$B$ kann sowohl als Normalbereich vom Typ $I$ wie auch als solcher vom Typ II geschrieben werden:

$$\begin{aligned} B &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1\le x\le 1 \text{ und } -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}\\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1\le y\le 1 \text{ und } -\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}\right\}. \end{aligned}$$

In der ersten Darstellung ist nach Teil *a)* des gerade bewiesenen Satzes

$$\iint_B dx\,dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\right)dx = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\,dx\,.$$

Zur Berechnung dieses Integrals können wir die *Substitutionsregel* anwenden: Mit $x = \sin t$ ist

$$\int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt\,,$$

und das rechtsstehende Integral läßt sich mit partieller Integration ausrechnen:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \sin t\cos t\,\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t\,dt$$

$$= 0 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\cos^2 t)\,dt = \pi - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt\,.$$

Damit ist

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2 t\,dt = \pi\,,$$

wie erwartet.

Etwa interessanter ist die Berechnung des (hoffentlich auch bekannten) Volumens der Einheitskugel

$$K = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 \le 1\right\}.$$

Hierzu könnten wir eine dreidimensionale Integration durchführen, es geht aber zum Glück auch einfacher: Natürlich genügt es, das Volumen der Halbkugel $z \ge 0$ zu bestimmen, und dies ist die Menge aller Punkte zwischen der Einheitskreisscheibe $B$ der $(x,y)$-Ebene und dem Graph der Funktion

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

über $B$. Somit ist das Volumen der Halbkugel gleich

$$\iint_B \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\right)dx\,.$$



Schreibt man mit $a = \sqrt{1-x^2}$

$$\sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{a^2-y^2} = a\sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2}\,,$$

so ist das innere Integral

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy = a\int_{-a}^{a} \sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2}\,dy\,,$$

was durch die Substitution $y = au$ zu

$$a\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\,a\,du = a^2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\,du = \frac{\pi}{2}a^2$$

wird, wie wir oben gerade nachgerechnet haben. Somit ist

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy = \frac{\pi}{2}(1-x^2)$$

und

$$\iint_B \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \frac{\pi}{2}(1-x^2)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2\pi}{3}\,;$$

das Kugelvolumen als Volumen zweier Halbkugeln ist also in der Tat, wie es sein soll, gleich $4\pi/3$.

In diesen Beispielen hatten wir nur Kreisscheiben als Normalbereiche, aber der Leser kann sich leicht überzeugen selbst davon überzeugen, daß sich die Nützlichkeit dieser Mengen keineswegs auf solche trivialen Beispiele beschränkt: Man zeichne frei irgendeneinen beschränkten zweidimensionalen Bereich auf ein Blatt Papier und überzeuge sich davon, daß sich dieser durch Einfügen von (meist sehr wenigen) waagrechten und senkrechten Strecken als Vereinigung von Normalbereichen der Typen I und II darstellen läßt.

## c) Die Transformationsformel

Von den vielen Regeln zur expliziten Bestimmung einer Stammfunktion ist sicherlich die Substitutionsregel die nützlichste; es lohnt sich daher, nach einer Verallgemeinerung dieser Regel für mehrdimensionale Integrale zu suchen.

Die Idee im Eindimensionalen ist bekanntlich, daß wir die Integrationsvariable $x$ als Funktion $x = \varphi(t)$ einer neuen Variablen $t$ schrieben; mit $a = \varphi(t_0)$ und $b = \varphi(t_1)$ ist dann

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} f\big(\varphi(t)\big)\dot\varphi(t)\,dt\,.$$

Genauso können wir auch bei einer Funktion mehrerer Veränderlicher diese als Funktionen neuer Variabler schreiben.

Beginnen wir der Anschaulichkeit halber mit einer Funktion $f(x,y)$ zweier Veränderlicher und schreiben wir diese als Funktionen

$$x = x(u,v) \quad \text{und} \quad y = y(u,v)$$

zweier neuer Variabler $u$ und $v$. Ein wichtiges Beispiel, das man zur Veranschaulichung während der folgenden Rechnungen im Kopf behalten sollte, ist die Polarkoordinatensdarstellung

$$x = x(r,\varphi) = r\sin\varphi \quad \text{und} \quad y = y(r,\varphi) = r\cos\varphi\,.$$

Zur Definition des Integrals

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy$$

approximierten wir den Intgegrationsbereich $B$ durch kleine achsenparallele Rechtecke. Wenn wir statt über $x$ und $y$ über $u$ und $v$ integrieren, müssen wir entsprechend den Bereich $B'$, in dem sich diese neuen Variablen bewegen, in achsenparallele Rechtecke zerlegen; dabei fordern wir nun natürlich Parallelität zur $u$- und zur $v$-Achse. Wir betrachten ein festes dieser Rechtecke; es habe die Eckpunkte

$$(u_0,v_0),\quad (u_0+h,v_0),\quad (u_0,v_0+k) \quad \text{und} \quad (u_0+h,v_0+k)$$



und somit den Flächeninhalt $hk$.

Die Menge der Punkte $(x,y)$, die zu den Punkten $(u,v)$ aus diesem Rechteck gehören, d.h. also die Menge

$$\Big\{\big(x(u,v),y(u,v)\big)\;\Big|\; u_0 \le u \le u_0+h \quad \text{und} \quad v_0 \le v \le v_0+k\Big\}$$

ist natürlich im allgemeinen kein Rechteck, sondern eine krummlinig begrenzte Figur; im Beispiel der Polarkoordinaten etwa wäre sie ein Winkelbereich zwischen zwei Kreisbögen. (An den bei Polarkoordinaten etwas problematischen Nullpunkt als Ecke denken wir in diesen Zusammenhang lieber nicht; es ist klar, daß sein Einfluß bei immer kleiner werdenden Rechtecken für eine um den Nullpunkt beschränkte Funktion $f$ immer kleiner wird.)

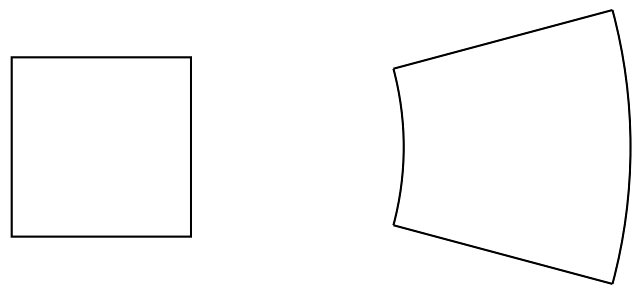

Abb. 43: Rechteck in $(r,\varphi)$-Ebene mit Bild in $(x,y)$-Ebene

Trotzdem machen wir, wenn $x$ und $y$ *differenzierbare* Funktionen von $u$ und $v$ sind, bei kleinen Rechtecken keinen allzu großen Fehler, wenn wir die transformierte Menge als *Parallelogramm* betrachten, denn nach

Definition der Differenzierbarkeit ist

$$x(u_0+h,v_0) = x(u_0,v_0) + h\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) + o(h)$$
$$y(u_0+h,v_0) = y(u_0,v_0) + h\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) + o(h)$$

$$x(u_0,v_0+k) = x(u_0,v_0) + k\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) + o(k)$$
$$y(u_0+h,v_0+k) = y(u_0,v_0) + k\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) + o(k)$$

und

$$\begin{aligned} x(u_0+h,v_0+k) &= x(u_0,v_0) + h\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) + o(h) \\ &\quad + k\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) + o(k) \\ y(u_0+h,v_0) &= y(u_0,v_0) + h\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) + o(h) \\ &\quad + k\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) + o(k)\,; \end{aligned}$$

wenn wir Terme der Größenordnung $o(h)$ und $o(k)$ vernachlässigen, ist die transformierte Menge also ein Parallelogramm mit Kantenvektoren

$$h\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad k\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) \end{pmatrix}.$$

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist bekanntlich gleich dem Produkt der Kantenlängen mal dem Sinus des eingeschlossenen Winkels; falls wir die beiden Vektoren in den $\mathbb{R}^3$ einbetten, indem wir ihnen eine Null als dritte Komponente geben, ist das gerade gleich dem Betrag des Vektorprodukts, das hier nur in der dritten Komponenten von null verschieden ist; die Fläche des Parallelogramms ist also

$$hk\cdot\left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right|.$$

Der gesamte Integrationsbereich wird approximiert durch die Vereinigung der Parallelogramme zu den sämtlichen Rechtecken, mit denen $B'$



approximiert wurde; wenn wir also davon ausgehen, daß die Koordinatentransformation zwischen und $B$ und $B'$ bijektiv ist und wenn wir – was eigentlich noch durch genauere Abschätzungen zu rechtfertigen wäre – auch davon ausgehen, daß wir die oben erwähnten Fehler beim Grenzübergang $h\to 0$ und $k\to 0$ vernachlässigen können, erhalten wir die

**Transformationsformel:** $f\colon B\to\mathbb{R}$ sei eine integrierbare Funktion auf $B\subseteq\mathbb{R}^2$, und die Variablen $x,y$ seien als differenzierbare Funktionen $x=x(u,v)$ und $y=y(u,v)$ neuer Variabler $u,v$ dargestellt. Ist dann $B'\subseteq\mathbb{R}^2$ ein Integrationsbereich, für den die Abbildung

$$B'\to B;\quad (u,v)\mapsto \big(x(u,v),\,y(u,v)\big)$$

bijektiv ist, so gilt

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{B'} f\big(x(u,v)\,y(u,v)\big)\left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right|\,du\,dv\,.$$

Für unbeschränkte Integrationsbereiche stehen hier natürlich uneigentliche Integrale; da diese – so sie existieren – Grenzwerte von üblichen Integralen sind, ist dies kein Problem.

Im Fall

$$x = r\cos\varphi \quad\text{und}\quad y = r\sin\varphi$$

der Polarkoordinaten ist

$$\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial\varphi} - \frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\varphi\cdot(r\cos\varphi) - (-r\sin\varphi)\cdot\sin\varphi = r\,,$$

d.h.

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{B'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

Für diese Formel hätten wir eigentlich nicht den ganzen Apparat der Transformationsformel gebrauch; Abbildung 43 zeigt uns, wie wir die Fläche des Bilds eines Parallelogramms exakt ausrechnen können: Variiert $r$ zwischen $r$ und $r+h$ und $\varphi$ zwischen $\varphi$ und $\varphi+k$, so erhalten wir in der $(x,y)$-Ebene als Bild die Differenz zwischen zwei Kreissektoren mit Öffnungswinkel $k$ und Radius $r+h$ beziehungsweise $r$; der Flächeninhalt ist also

$$\tfrac12 k(r+h)^2 - \tfrac12 kr^2 = r\cdot kh + \tfrac12 kh^2\,.$$

Wenn $h$ und $k$ simultan gegen null gehen, können wir $kh^2$ gegenüber $kh$ vernachlässigen, der Flächeninhalt $kh$ des Rechtecks aus der $(r,\varphi)$-Ebene wird also im wesentlichen nur mit $r$ multipliziert – genau wie es die obige Rechnung auch zeigt.

Mit dieser Formel können wir beispielsweise noch einmal die Fläche eines Kreises ausrechnen: Die Punkte der Kreisscheibe $B$ mit Radius $R$ um den Nullpunkt haben Polarkoordinaten $(r,\varphi)$ im Rechteck

$$B' = \left\{(r,\varphi) \;\middle|\; 0 \le r \le R \quad \text{und} \quad 0 \le \varphi < 2\pi\right\};$$

die Fläche von $B$ ist also

$$\iint\limits_B dx\,dy = \iint\limits_{B'} r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R r\,dr\right)d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{R^2}{2}\,d\varphi = \pi R^2 .$$

Im Vergleich zum letzten Abschnitt, wo wir das Integral (für $R = 1$) in kartesischen Koordinaten ausrechneten und dazu die Funktion $\sqrt{1-x^2}$ integrieren mußten, ist diese Rechnung erheblich einfacher; die Transformationsformel leistet also genau das, was wir von einer verallgemeinerten Substitutionsregel erwarten: Bei *geschickter,* an das Problem angepaßter Substitution kann sie die Berechnung eines Integrals erheblich vereinfachen.

Als nächstes Beispiel wollen wir endlich einmal ein Integral ausrechnen, bei dem wir das Ergebnis nicht besser und viel einfacher durch elementargeometrische Überlegungen bekommen können: das Integral

$$I \underset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx .$$

Man kann zeigen, daß die Stammfunktion von $e^{-x^2}$ nicht in geschlossener Form durch elementare Funktionen ausdrückbar ist; Integration mittels Stammfunktion ist also zwecklos. Stattdessen benutzen wir folgenden Trick:

Durch Grenzübergang können wir auch auch auf das unendliche „Rechteck“ $\mathbb{R}^2$ als Normalbereich auffassen; daher ist

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\right)dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\cdot I\,dy\\ &= I\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = I^2 .\end{aligned}$$

In Polarkoordinaten entspricht $\mathbb{R}^2$ dem Bereich $B' = \mathbb{R}_{\ge 0}\times[0,2\pi)$; also ist das betrachtete Integral nach der Transformationsformel auch gleich

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint\limits_{B'} e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr\right)d\varphi .$$

Die Stammfunktion des neuen Integranden $re^{-r^2}$ ist leicht zu finden: Aus

$$\frac{d}{dr}e^{-r^2} = -2re^{-r^2}$$

folgt sofort, daß

$$\int re^{-r^2}\,dr = -\tfrac{1}{2}e^{-r^2} + C .$$

Damit können wir weiterrechnen und erhalten das Ergebnis

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr\right)d\varphi = \int_0^{2\pi} -\tfrac12 e^{-r^2}\Big|_0^{\infty}\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\tfrac12\,d\varphi = \pi .$$

Also ist $I^2 = \pi$ und, da der Integrand von $I$ überall positiv ist, folgt

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} .$$

Zur Verallgemeinerung der Transformationsformel auf höhere Dimensionen beachten wir zunächst, daß der Term

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

in der Formel

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{B'} f\big(x(u,v)\,y(u,v)\big)\left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right|du\,dv$$

gerade gleich der Determinanten der JACOBI-Matrix

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$$

des Koordinatenwechsels

$$(u,v)\mapsto\big(x(u,v),\,y(u,v)\big)$$

ist. Diese können wir uns auch geometrisch veranschaulichen, denn sie ist ja gerade der Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Kantenvektoren

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\end{pmatrix}.$$

Den Flächeninhalt eines Parallelogramms mit Kantenvektoren $\vec a$ und $\vec b$ können wir auch wie folgt ausrechnen:

Das (kartesische) Koordinatensystem in $\mathbb{R}^2$ sei so gewählt, daß der Vektor $\vec a$ ein Vielfaches $a\vec e_1$ des ersten Koordinateneinheitsvektors ist. Falls dann auch noch $\vec b=b\vec e_2$ ein Vielfaches des zweiten sein sollte, falls also das Parallelogramm sogar ein achsenparalleles Rechteck sein sollte, ist dessen Fläche gleich

$$ab=\det\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}=\det(\vec a,\vec b)\,.$$

Im allgemeinen wird das Parallelogramm natürlich kein Rechteck sein; da die Basisvektoren im Gegensatz zu $\vec a$ und $\vec b$ aufeinander senkrecht stehen, müssen wir $\vec b$ dann als Linearkombination $\vec b=c\vec e_1+b\vec e_2$ schreiben.



Dabei können wir $b\vec e_2$ als Projektion von $\vec b$ auf die von $\vec e_2$ aufgespannte Koordinatenachse auffassen. Da sich das Parallelogramm durch Scherung in das Rechteck mit Kantenvektoren $\vec a$ und $b\vec e_2$ überführen läßt und sich der Flächeninhalte bei Scherungen nicht ändern, hat das Parallelogramm immer noch den Flächeninhalt

$$ab=\det\begin{pmatrix}a&c\\0&b\end{pmatrix}=\det(\vec a,\vec b)\,.$$

Beim Übergang zu einem anderen orthonormalen Koordinatensystem werden die Koordinatenachsen gedreht, d.h. sie werden mit einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

multipliziert. Da deren Determinante gleich eins ist, ändert sich dabei nach dem Multiplikationssatz für Determinanten nichts am Wert von $\det(\vec a,\vec b)$. Der Flächeninhalt eines von den Vektoren $\vec a$ und $\vec b$ aufgespannten Parallelogramms ist also stets gleich $\det(\vec a,\vec b)$, egal bezüglich welcher Orthonormalbasis die Kantenvektoren dargestellt werden.

Genauso können wir auch in höheren Dimensionen argumentieren: Durch mehrfache Scherung läßt sich ein beliebiges Parallelepiped in einen Quader überführen; das Volumen des von $n$ Kantenvektoren $\vec a_1,\dots,\vec a_n$ aufgespannten Parallelepipeds ist also gleich

$$\det(\vec a_1,\dots,\vec a_n)\,.$$

(Für $n=3$ kennen wir diese Formel bereits, denn wir wissen, daß dort das Volumen gleich dem Spatprodukt $(\vec a_1\times\vec a_2)\cdot\vec a_3$ der drei Vektoren ist, und dieses wiederum ist gleich der Determinanten.)

Damit gilt also im $\mathbb{R}^n$ die

**Transformationsformel:** $f\colon B\to\mathbb{R}$ sei eine integrierbare Funktion auf $B\subseteq\mathbb{R}^n$, und die Variablen $x_1,\dots,x_n$ seien als differenzierbare Funktionen

$$\begin{aligned}x_1&=x_1(u_1,\dots,u_n)\\&\ \vdots\\x_n&=x_n(u_1,\dots,u_n)\end{aligned}$$

neuer Variabler $u_1, \dots, u_n$ dargestellt. Ist dann $B' \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Integrationsbereich, für den die Abbildung

$$B' \to B; \quad \boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$$

bijektiv ist, so gilt

$$\int \underset{B}{\cdots} \int f(\boldsymbol{x})\,dx_1 \cdots dx_n = \int \underset{B'}{\cdots} \int f\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})\big)\,|\det J_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{u})|\;du_1 \cdots du_n\,.$$

■

Ausgeschrieben wird die Formel für den $\mathbb{R}^3$, wenn wir kurz

$$F(u,v,w) \underset{\text{def}}{=} f\big(x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w)\big)$$

schreiben, zu

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$\iiint\limits_{B'} F(u,v,w)\left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}\right| du\,dv\,dw\,.$$

Als Beispiel können wir wieder Koordinatensysteme betrachten: Für Kugelkoordinaten ist

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\vartheta \\ y &= r\sin\varphi\sin\vartheta \quad , \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}$$

die JACOBI-Matrix ist also

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta \end{pmatrix}.$$



Entwicklung nach der dritten Zeile ergibt für die Determinante den Wert

$$\begin{aligned} &\cos\vartheta \begin{vmatrix} -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta \\ r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta \end{vmatrix} \\ -\ &r\sin\vartheta \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta \end{vmatrix} \\ =\ &-r^2\cos\vartheta(\sin\vartheta\cos\vartheta) - r^2\sin\vartheta\cdot\sin^2\vartheta = -r^2\sin\vartheta\,. \end{aligned}$$

Der Betrag der Determinanten der JACOBI-Matrix ist also

$$r^2\,|\sin\vartheta|\,,$$

und mit

$$F(r,\varphi,\vartheta) = f(r\cos\varphi\sin\vartheta,\ r\sin\varphi\sin\vartheta,\ r\cos\vartheta)$$

wird die Transformationsformel zu

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{B'} F(r,\varphi,\vartheta)\cdot r^2\,|\sin\vartheta|\;dr\,d\varphi\,d\vartheta\,.$$

Berechnen wir zur Kontrolle schnell noch einmal das Volumen der Kugel $B$ um den Nullpunkt mit Radius $R$:

$$\iiint\limits_B dx\,dy\,dz = \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R r^2\,|\sin\vartheta|\;dr\right)\,d\varphi\right)\,d\vartheta$$

$$= \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \frac{R^3}{3}\,|\sin\vartheta|\;d\varphi\right)\,d\vartheta = \frac{2\pi R^3}{3}\int_0^\pi \sin\vartheta\,d\vartheta = \frac{4\pi R^3}{3}\,.$$

Außer den Kugelkoordinaten hatten wir im $\mathbb{R}^3$ auch noch Zylinderkoordinaten betrachtet; für diese ist

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \qquad \text{und} \\ z &= z\,, \end{aligned}$$

also
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
und die Determinante davon ist wie bei den ebenen Polarkoordinaten gleich $r$. Also haben wir hier im wesentlichen dieselbe Transformationsformel wie bei den ebenen Polarkoordinaten (Zylinderkoordinaten sind schließlich im wesentlichen auch nichts anderes als ebene Polarkoordinaten), nämlich
$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{B'} F(r,\varphi,z)\cdot r\,dr\,d\varphi\,dz\,,$$
wobei wieder
$$F(r,\varphi,z) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$
sein soll.

Genauso lassen sich auch beliebige andere Koordinatensysteme behandeln, beispielsweise könnte man zum Rechnen mit einem Ellipsoid auch Ellipsoidkoordinaten
$$x = a\cos\varphi\sin\vartheta$$
$$y = b\sin\varphi\sin\vartheta$$
$$z = c\cos\vartheta$$
einführen und damit das Volumen des Ellipsoids
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
bestimmen. (Die Antwort ist natürlich *(?)* $\frac{4}{3}\pi abc$.)

In Physik und Technik sind noch zahlreiche weitere bewährte Koordinatensysteme im Einsatz, auf die wir hier nicht eingehen können; dank der obigen Transformationsformel kann man immer das benutzen, das der jeweiligen Situation am besten angepaßt ist und mithin am wenigsten Rechnung verlangt.



### d) Der Satz von Green und der ebene Satz von Gauß

$B \subset \mathbb{R}^2$ sei ein Bereich, dessen Rand aus endlich vielen Kurvenstücken bestehe. Dann können wir sowohl über $B$ als auch über dessen Randkurve $\partial B$ integrieren; die beiden Sätze in diesem Abschnitt befassen sich mit der Beziehung zwischen diesen beiden Integrationen.

Im allgemeinen kann man natürlich nicht viel erwarten: Nimmt man aus $B$ eine Kurve $\gamma$ heraus, ist es bei der Integration einer stetigen Funktion gleichgültig, ob man über $B$ oder über $B \setminus \gamma$ integriert, das Randintegral ändert sich aber um das im allgemeinen nicht verschwindende Kurvenintegral über $\gamma$.

Für eine geschlossene Kurve $\gamma$ dagegen erwarten wir, wenn wir uns von der Anschauung leiten lassen und uns die Kurve als eine Art deformierten Kreis vorstellen, daß sie die Ebene in zwei Bereiche zerlegt: einen beschränkten Bereich $B$ und einen unbeschränkten Bereich $B'$. Hier sollten sich $\gamma$ und $B$ gegenseitig so stark beeinflussen, daß eigentlich auch die Integration über $B$ etwas mit der Integration über $\gamma$ zu tun haben müßte.

Nun ist es natürlich etwas gefährlich, sich *nur* von der Anschauung leiten zu lassen, denn es gibt sicherlich erheblich mehr Kurven, als man sich gemeinhin vorstellt. Beispielsweise gibt es auch Kurven, die wie eine Ziffer 8 aussehen, etwa die Lemniskate, und diese zerlegen die Ebene in *drei* Bereiche. Wir müssen also noch zusätzlich fordern, daß sich die Kurve nicht selbst überkreuzt, aber dann gilt in der Tat

**Jordanscher Kurvensatz:** $\gamma$ sei eine geschlossene ebene Kurve ohne Überkreuzungen. Dann hat $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ zwei Zusammenhangskomponenten, von denen die eine beschränkt und die andere unbeschränkt ist.

MARIE ENNEMOND CAMILLE JORDAN (1838–1922) leistete wesentliche Beiträge zur Entwicklung der Topologie und der Gruppentheorie. Er beschäftigte sich auch mit der Lösbarkeit nichtlinearer Gleichungen und stellte in einem vielbeachteten Buch die GALOISsche Theorie über die Nichtlösbarkeit allgemeiner Gleichungen vom Grad größer vier dar. Seine Untersuchungen über endliche Körper führten ihn zu der heute als JORDAN-Zerlegung bekannten Darstellung von Matrizen, mit der wir uns im nächsten Semester beschäftigen werden; außerdem bewies er Satze über die Konvergenz von FOURIER-Reihen.

Der Beweis dieses anschaulich fast selbstverständlichen Satzes erfordert einen erstaunlich großen Aufwand: Man muß die Ebene in kleine Quadrate (oder Dreiecke oder etwas ähnliches) unterteilen, $\gamma$ durch Kantenzüge aus deren Seiten annähern, den Satz durch aufwendige Rechnungen mit formalen Summen von Quadraten und Quadratseiten für die angenäherten Kurven beweisen und dann schließlich noch durch ein Limesargument zeigen, daß die Aussage auch für $\gamma$ selbst gilt. Die genaue Durchführung dieses Beweises würde etwa drei Vorlesungstermine erfordern – ein Aufwand, der für uns in keinem vernünftigen Zusammenhang mit seinem Nutzen steht: Bei den meisten in der Praxis vorkommenden Kurven wird die Aussage des JORDANschen Kurvensatzes zumindest für diese speziellen Kurven ohnehin klar sein.

Um den JORDANschen Kurvensatz zu umgehen, starten wir einfach mit einem Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$, von dem wir all das verlangen, was uns nachher das Leben einfach macht; in der Praxis sollte es (hoffentlich) selten schwierig sein, diese Forderungen für die Bereiche aus konkreten Anwendungen zu verifizieren.

**Satz von Green:** $B \subset \mathbb{R}^2$ sei eine abgeschlossene Menge, die sowohl als Vereinigung endlich vieler Normalbereiche vom Typ I wie auch als Vereinigung endlich vieler Normalbereiche vom Typ II geschrieben werden kann; ihre Randkurve $\gamma$ sei so orientiert, daß $B$ im Gegenuhrzeigersinn umlaufen wird. Weiter sei $\vec{V} \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^2)$ ein differenzierbares



Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $D \supset B$ von $\mathbb{R}^2$. Dann ist

$$\int_\gamma \vec{V}\,ds = \iint_B \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) dx\,dy\,.$$

*Beweis:* Wir betrachten zunächst nur ein Vektorfeld $\vec{V} = \binom{V_1}{0}$ mit verschwindender $y$-Komponente und setzen $B$ als Normalbereich

$$N = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \le x \le b \quad\text{und}\quad f(x) \le y \le g(x)\right\}$$

voraus. Das Integral über die Randkurve $\gamma$ berechnen wir am besten komponentenweise:

$$\gamma_1 \colon [a,b] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto \bigl(t, f(t)\bigr)$$

sei die untere Begrenzungskurve,

$$\gamma_2 \colon \bigl[f(b), g(b)\bigr] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto (b,t)$$

die rechte Randstrecke,

$$\gamma_3 \colon [a,b] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto \bigl(t, g(t)\bigr)$$

die obere Begrenzungskurve, und

$$\gamma_4 \colon \bigl[f(a), g(a)\bigr] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto \bigl(a,t\bigr)$$

schließlich die linke Seitenstrecke.

Dann ist $\dot{\gamma}_1(t) = \binom{1}{f'(t)}$, also

$$\int_{\gamma_1} \vec{V}\,ds = \int_a^b \begin{pmatrix} V_1\bigl(t,f(t)\bigr) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} dt = \int_a^b V_1\bigl(t,f(t)\bigr)\,dt$$

und entsprechend

$$\int_{\gamma_3} \vec{V}\,ds = \int_a^b \begin{pmatrix} V_1\bigl(t,g(t)\bigr) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ g'(t) \end{pmatrix} dt = \int_a^b V_1\bigl(t,g(t)\bigr)\,dt\,.$$

Für die beiden Seitenstrecken ist $\dot\gamma_2(t) = \binom{0}{1} = \dot\gamma_4(t) = \binom{0}{1}$, also ist

$$\int_{\gamma_2} \vec V\,ds = \int_{f(a)}^{g(a)} \begin{pmatrix} V_1(a,t) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = 0\,,$$

und genauso folgt auch das Verschwinden des Integrals über $\gamma_4$.

Wenn wir im Gegenuhrzeigersinn um $N$ herum integrieren, werden die Kurvenstücke $\gamma_3$ und $\gamma_4$ rückwärts durchlaufen, also ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec V\,ds &= \int_{\gamma_1} \vec V\,ds + \int_{\gamma_2} \vec V\,ds - \int_{\gamma_3} \vec V\,ds - \int_{\gamma_4} \vec V\,ds \\ &= \int_a^b V_1\big(t, f(t)\big)\,dt - \int_a^b V_1\big(t, g(t)\big)\,dt \\ &= \int_a^b \Big(V_1\big(t, f(t)\big) - V_1\big(t, g(t)\big)\Big)\,dt\,.\end{aligned}$$

Da $N$ Normalbereich vom Typ I ist, können wir auch das Flächenintegral über $N$ leicht ausrechnen:

$$\iint_N \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_N -\frac{\partial V_1}{\partial y}\,dx\,dy$$

$$= -\int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial V_1}{\partial y}\,dy\right) dx = \int_a^b \Big(V_1\big(x, g(x)\big) - V_1\big(x, f(x)\big)\Big)\,dx\,.$$

Zumindest für das hier betrachtete spezielle Vektorfeld $V$ ohne $y$-Komponente und einen Normalbereich vom Typ I ist der Satz also richtig.

Damit gilt er aber zumindest für dieses spezielle Vektorfeld auch für jeden Bereich $B$, der sich in Normalbereiche vom Typ I zerlegen läßt: Das Flächenintegral über $B$ ist gleich der Summe der Flächenintegrale über die Normalbereiche vom Typ $I$, in die wir $B$ zerlegt haben und somit



problemlos. Die Randkurve von $B$ besteht einerseits aus Kurvenstücken, die auch zum Rand von $B$ gehören, andererseits aus solchen, die durch die Zerlegung eingeführt wurden und zwei Normalbereiche voneinander trennen. Letztere werden aber als Randkurven der beiden angrenzenden Normalkurven jeweils in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, so daß sich die Integrale längs solcher Kurvenstücke gegenseitig wegheben. Summiert man also die Integrale über die Ränder aller Normalbereiche auf, bleiben am Ende nur die Integrale längs jener Kurvenstücke übrig, die auf der Randkurve von $B$ liegen, die Summe ist somit gleich dem Integral über die Randkurve.

Damit ist der Satz bewiesen für alle Vektorfelder $\vec V$ mit verschwindender $y$-Komponente.

Als nächstes beweisen wir ihn für Vektorfelder $\vec V$ mit verschwindender $x$-Komponente; wenn man mit Normbereichen vom Typ II argumentiert statt mit solchen vom Typ I, kann man dazu die obigen Argumente fast wörtlich wiederholen.

Der Rest des Beweises ist nun einfach: Ein beliebiges Vektorfeld $\vec V$ läßt sich als Summe

$$\vec V(x,y) = \begin{pmatrix} V_1(x,y) \\ V_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1(x,y) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ V_2(x,y) \end{pmatrix}$$

schreiben, und der Satz gilt für beide Summanden. Da beide Seiten der Behauptung linear in $\vec V$ sind, folgt der Satz auch für $\vec V$ selbst. ■

GEORGE GREEN (1793–1841) war der Sohn eines Bäckers aus Nottingham. Er besuchte nur von 1801 bis 1802 eine Schule, danach arbeitete er in der Bäckerei und später in der dazugekauften Mühle. Es ist nicht bekannt, wann und wie er Mathematik lernte. 1827 veröffentlichte er sein Buch *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism,* von dem 51 Exemplare verkauft wurden, größtenteils in Nottingham selbst. Einer der Leser stellte Kontakte zur Cambridge Philosophical Society und zur Royal Academy in Edinburgh her, so daß Greens weitere Arbeiten (über Elektrizität und über Hydrodynamik) dort veröffentlicht wurden. 1833 begann er mit dem Studium der Mathematik an der Universität Cambridge; nach dessen Abschluß blieb er in Cambridge, bis er 1840 wegen gesundheitlicher Probleme nach Nottingham zurückkehrte. Weder GREEN selbst noch seine Zeitgenossen erkannten die Bedeutung seiner Arbeiten, die, in heutiger Sprechweise, Potentialfunktionen einführten und für die

Physik nutzbar machten. Auf dieser Grundlage bauten später JAMES CLERK MAXWELL (1831–1879) und andere die Elektrodynamik auf.

Wenn wir für $\vec{V}$ speziell ein Vektorfeld der Form

$$\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} -\Phi_y(x,y) \\ \Phi_x(x,y) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \Phi \in \mathcal{C}^2(D,\mathbb{R})$$

einsetzen, erhalten wir für das Flächenintegral

$$\iint\limits_B \left( \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) dx\,dy = \iint\limits_B (\Phi_{xx} + \Phi_{yy})\,dx\,dy = \iint\limits_B \Delta\Phi\,dx\,dy\,,$$

wobei $\Delta$ wie üblich den LAPLACE-Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

bezeichnet.

Das Integral über die Randkurve $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ wird zu

$$\int\limits_\gamma \begin{pmatrix} -\Phi_y\big(\gamma(t)\big) \\ \Phi_x\big(\gamma(t)\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\gamma_1(t) \\ \dot\gamma_2(t) \end{pmatrix} dt$$

$$= \int\limits_\gamma \Big( -\Phi_y\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot\gamma_1(t) + \Phi_x\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot\gamma_2(t) \Big)\,dt$$

$$= \int\limits_\gamma \begin{pmatrix} \Phi_x\big(\gamma(t)\big) \\ \Phi_y\big(\gamma(t)\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\gamma_2(t) \\ -\dot\gamma_1(t) \end{pmatrix} dt\,.$$

Der erste Vektor im Integranden der dritten Zeile ist einfach der Gradient von $\Phi$. Der zweite Vektor hat Skalarprodukt null mit dem Tangentenvektor $\dot\gamma(t) = \binom{\dot\gamma_1(t)}{\dot\gamma_2(t)}$, steht also auf diesem senkrecht und ist somit ein *Normalenvektor.* Das Skalarprodukt des Gradienten einer Funktion mit einem Vektor ist bekanntlich die *Richtungsableitung* der Funktion in Richtung dieses Vektors; mit

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \dot\gamma_2(t) \\ -\dot\gamma_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \partial_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \text{grad}$$

erhalten wir somit den



**Satz von Gauß** (ebener Fall)**:** Für $B, D$ und $\gamma$ wie im Satz von GREEN und $\Phi \in \mathcal{C}^2(D,\mathbb{R}^2)$ gilt

$$\iint\limits_B \Delta\Phi\,dx\,dy = \int\limits_\gamma \partial_{\vec{n}}\Phi\,ds\,.$$

■

Mit einer Verallgemeinerung sowie auch mit der anschaulichen Interpretation dieses Satzes werden wir uns in Abschnitt *f)* noch genauer befassen.

## e) Oberflächenintegrale

Im dreidimensionalen Fall wird der Satz von GAUSS, wie die meisten wohl bereits aus der Physik wissen, ein Volumenintegral mit dem Fluß durch eine Oberfläche in Verbindung bringen. Was Volumenintegrale sind, haben wir inzwischen auch hier definiert; in diesem Abschnitt geht es um den Begriff des Oberflächenintegrals, um den Fluß eines Vektorfelds durch eine Oberfläche und um verwandte Themen.

Die Vorgehensweise bei der Definition eines Oberflächenintegrals entspricht genau der bei der Definition des Kurvenintegrals: Dort hatten wir Kurvenstücke als Funktionen $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ definiert; hier definieren wir entsprechend *Flächenstücke* durch Funktionen zweier Parameter. Wir müssen dabei allerdings etwas sorgfältiger vorgehen, denn im Vergleich zum Kurvenfall ist die Situation zumindest in zweierlei Hinsicht komplexer: Erstens gibt es auf der reellen Geraden im wesentlichen nur eine Art von zusammenhängenden Teilmengen, nämlich die Intervalle. In der Ebenen gibt es erheblich mehr Möglichkeiten – aber damit hatten wir uns ja schon bei der Definition von Flächen- und Volumenintegralen beschäftigt. Zweitens mußten wir bei Kurven nur fordern, daß $\dot\gamma(t)$ nirgends verschwindet, um die Existenz eines Tangentenvektors zu garantieren. Hier im Zweidimensionalen recht das nicht mehr: Ein Flächenstück hat in jedem Punkt Anspruch nicht nur auf eine Tangente, sondern auf eine ganze *Tangentialebene;* wir müssen also sicherstellen, daß es in jedem Punkt mindestens zwei linear unabhängige Tangentenvektoren gibt.

Die dazu notwendigen Definitionen kann man problemlos für Flächenstücke in jedem $\mathbb{R}^n$ hinschreiben; wir wollen uns aber, da dies für alle hier betrachteten Anwendungen ausreicht, auf den etwas anschaulicheren Fall von Flächenstücken im $\mathbb{R}^3$ beschränken.

Ein Flächenstück soll demnach gegeben sein durch eine Funktion

$$f\colon B \to \mathbb{R}^3; \quad (u,v) \mapsto f(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

auf einer Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^2$; mit Blick auf unsere Erfahrungen bei Kurvenstücken wollen wir von vornherein fordern, daß $f$ differenzierbar sein soll in einer offenen Umgebung von $B$. Für kleine reelle Zahlen $h, k$ ist dann für einen Punkt $(u_0, v_0) \in B$

$$f(u_0+h, v_0+k) = f(u_0,v_0) + f_u(u_0,v_0)\cdot h + f_v(u_0,v_0)\cdot k + o\big(\sqrt{h^2+k^2}\big)\,.$$

Da hier nur $h$ und $k$ variabel sind, bedeutet die Forderung nach zwei linear unabhängigen Tangentialvektoren, daß die beiden Vektoren $f_u(u_0,v_0)$ und $f_v(u_0,v_0)$ in allen Punkten $(u_0,v_0) \in B$ linear unabhängig sein müssen.

An dieser Stelle führt die Beschränkung auf den $\mathbb{R}^3$ zu einer kleinen Vereinfachung: Im $\mathbb{R}^3$, und nur dort, existiert ein Vektorprodukt; zwei Vektoren sind genau dann linear unabhängig, wenn dieses Vektorprodukt ungleich dem Nullvektor ist. Sowohl der Betrag als auch die Richtung dieses Vektors werden uns schon bald in mehrfacher Hinsicht nützlich sein; wir definieren daher

**Definition:** Ein reguläres Flächenstück im $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch einen Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$ und eine in einer offenen Menge $D \supseteq B$ differenzierbaren Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}^3$; $\quad (u,v) \mapsto f(u,v)$, für die gilt:
*1.)* Die Einschränkung $f_{|B}$ von $f$ auf $B$ ist injektiv.
*2.)* In jedem Punkt $(u_0,v_0) \in B$ ist $f_u(u_0,v_0) \times f_v(u_0,v_0) \neq \vec{0}$.

Die wichtigste Oberfläche, mit der wir es im folgenden zu tun haben werden, ist die der Kugel. Die Oberfläche einer Kugel vom Radius $R$ hat in Kugelkoordinaten die Gleichung $r = R$ mit beliebigen Winkelkoordinaten $\varphi$ und $\vartheta$, sie ist also (in kartesischen Kordinaten) gegeben



durch die Funktion

$$f\colon [0,2\pi)\times[0,\pi] \to \mathbb{R}^3; \quad (\varphi,\vartheta) \mapsto \begin{pmatrix} R\cos\varphi\sin\vartheta \\ R\sin\varphi\sin\vartheta \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Die Differenzierbarkeit ist hier überhaupt kein Problem: Die angegebene Funktion ist sogar auf ganz $\mathbb{R}^2$ beliebig oft stetig differenzierbar.

Bei der Injektivität gibt es allerdings Probleme: Für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ ist $\sin\vartheta = 0$; daher werden alle Parameterpaare $(\varphi, 0)$ auf $(0,0,R)$ und aller Parameterpaare $(\varphi,\pi)$ auf $(0,0,-R)$ abgebildet.

Das ist aber glücklicherweise auch bereits alles was passieren kann, denn falls $\sin\vartheta \neq 0$ ist, können wir aus der dritten Komponenten $R\cos\vartheta$ den Winkel $\vartheta \in [0,\pi]$ eindeutig bestimmen. Damit kennen wir auch $R\sin\vartheta$ und bekommen aus den ersten beiden Komponenten von $f$ den Cosinus und den Sinus von $\varphi$, wodurch $\varphi \in [0,2\pi)$ eindeutig festgelegt ist.

Die partiellen Ableitungen von $f$ sind

$$f_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\sin\vartheta \\ R\cos\varphi\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \quad\text{und}\quad f_\vartheta = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\vartheta \\ R\sin\varphi\cos\vartheta \\ -R\sin\vartheta \end{pmatrix},$$

also ist

$$f_\varphi \times f_\vartheta = \begin{pmatrix} R^2\cos\varphi\sin^2\vartheta \\ R^2\sin\varphi\sin^2\vartheta \\ R^2\sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix} = R\sin\vartheta\cdot f(\varphi,\vartheta)\,.$$

Da für eine echte Kugel $R > 0$ sein muß und $f(\varphi,\vartheta)$ die Länge $R$ hat, ist dieser Vektor genau dann gleich dem Nullvektor, wenn $\sin\vartheta = 0$ ist; wie bei der Injektivität gibt es also wieder Probleme an den Polen, aber auch nur dort.

Somit können wir die Kugel nur dann als reguläres Flächenstück auffassen, wenn wir die beiden Pole herausnehmen, d.h. wenn wir uns auf den Parameterbereich $[0,2\pi)\times(0,\pi)$ beschränken.

Für die meisten praktischen Zwecke ist das natürlich völlig unproblematisch: Bei der Flächenbestimmung oder allgemeiner der Integration einer beschränkte Funktion sind einzelne, isoliert liegende Punkte irrelevant. Lediglich im Falle von uneigentlichen Integranden muß man hier sehr vorsichtig sein; hier in dieser Vorlesung sollen entsprechende Integrale deshalb vorsichtshalber gleich gar nicht erst definiert werden.

Nachdem wir nun wissen, was ein reguläres Flächenstück ist, müssen wir als nächstes lernen, damit zu rechnen. Bevor wir uns an die Bestimmung von Flächeninhalten machen, ist es vielleicht ganz nützlich (wenn auch nicht unbedingt notwendig), daß wir uns ein paar Gedanken über die *Längenmessung* machen.

Längen sind Eigenschaften von Kurven; wir müssen also eine Kurve oder – da wir Längen auch stückweise aneinandersetzen können – einfacher ein Kurvenstück auf einem Flächenstück betrachten. Genau wie man etwa bei der Navigation auf der Erde nicht von einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem ausgeht, sondern von der geographischen Länge und Breite, empfiehlt es sich auch hier, Kurven über die Parameter des Flächenstücks zu definieren – und sei es auch nur, um sicher zu sein, daß die Kurve auch wirklich auf dem Flächenstück liegt.

Wir beschreiben eine Kurve auf einem Flächenstück $f: B \to \mathbb{R}^3$ daher durch eine Funktion

$$\delta: [a,b] \to B; \quad t \mapsto \big(u(t), v(t)\big) ;$$

die eigentliche Kurve im $\mathbb{R}^3$ wird dann beschrieben durch die zusammengesetzte Abbildung

$$\gamma = f \circ \delta: [a,b] \to \mathbb{R}^3; \quad t \mapsto f\big(u(t), v(t)\big) .$$

Wir wollen natürlich, daß diese Kurve immer dieselbe Länge hat, egal ob wir sie einfach so im $\mathbb{R}^3$ oder auf einem Flächenstück betrachten. Die Länge des Kurvenstücks $\gamma$ auf dem Flächenstück $f$ ist daher gleich der bekannten Länge des Kurvenstücks $\gamma$ im $\mathbb{R}^3$, also

$$\int_a^b |\dot\gamma(t)|\, dt = \int_a^b \left| f_u\big(u(t), v(t)\big)\frac{du}{dt} + f_v\big(u(t), v(t)\big)\frac{dv}{dt} \right| dt .$$

Der Betrag des Vektors $f_u\big(u(t), v(t)\big)\frac{du}{dt} + f_v\big(u(t), v(t)\big)\frac{dv}{dt}$ ist gleich der Wurzel aus dem Skalarprodukt des Vektors mit sich selbst, also der



Wurzel aus

$$\begin{aligned} & f_u\big(u(t), v(t)\big)^2 \left(\frac{du}{dt}(t)\right)^2 \\ &+ 2 f_u\big(u(t), v(t)\big) \cdot f_v\big(u(t), v(t)\big) \left(\frac{du}{dt}(t)\right)\left(\frac{dv}{dt}(t)\right) \\ &+ f_v\big(u(t), v(t)\big)^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 . \end{aligned}$$

In dieser Formel können wir zwei Arten von Termen unterscheiden: Rechts stehen jeweils die Ableitungen von $u$ und $v$ nach $t$; diese hängen nur von der jeweiligen Kurve ab, die ja gerade durch die Funktionen $u(t)$ und $v(t)$ definiert ist. Links dagegen stehen Ausdrücke in den partiellen Ableitungen von $f$ nach $u$ und $v$; diese sind Funktionen auf dem Flächenstück und sind insbesondere unabhängig von jeder Kurve. Wir bezeichnen daher diese drei letzteren Größen

$$\begin{aligned} E(u,v) &= f_u(u,v) \cdot f_u(u,v) , \\ F(u,v) &= f_u(u,v) \cdot f_v(u,v) \quad \text{und} \\ G(u,v) &= f_v(u,v) \cdot f_v(u,v) \end{aligned}$$

als *Fundamentalgrößen* des Flächenstücks $f$.

Um etwas Übung im Umgang mit diesen Größen zu bekommen, wollen wir sie für die Kugeloberfläche in ihrer oben angegebenen Parametrisierung berechnen. Hier ist, wie wir schon wissen,

$$f_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\sin\vartheta \\ R\cos\varphi\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_\vartheta = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\vartheta \\ R\sin\varphi\cos\vartheta \\ -R\sin\vartheta \end{pmatrix} ;$$

also ist

$$\begin{aligned} E(\varphi,\vartheta) &= R^2(\sin^2\varphi\sin^2\vartheta + \cos^2\varphi\sin^2\vartheta) = R^2\sin^2\vartheta \\ F(\varphi,\vartheta) &= R^2(-\sin\varphi\sin\vartheta\cos\varphi\cos\vartheta + \cos\varphi\sin\vartheta\sin\varphi\cos\vartheta) = 0 \\ G(\varphi,\vartheta) &= R^2(\cos^2\varphi\cos^2\vartheta + \sin^2\varphi\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) = R^2 . \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis sollte man auch geometrisch interpretieren: Das Verschwinden von $F$, die Orthogonalität von $f_\varphi$ und $f_\vartheta$ also, bedeutet, daß die Längenkreise und die Breitenkreise in jedem Punkt der Kugel (außer den beiden Polen) aufeinander senkrecht stehen; die Konstans von $G$ kommt daher, daß alle Längenkreise gleich lang sind, und die $\vartheta$-Abhängigkeit von $E$ schließlich reflektiert die Tatsache, daß die Breitenkreise verschiedene Radien haben.

Allgemein kann man die Länge einer Kurve auf einem Flächenstück somit als Integral

$$\int_a^b \sqrt{E\,\dot{u}^2 + 2F\,\dot{u}\dot{v} + G\,\dot{v}^2}\,dt$$

berechnen; dem interessierten Leser sei empfohlen, damit beispielsweise überprüfen, daß Breitenkreise i.a. nicht die kürzeste Verbindung zwischen zweien ihrer Punkte sind, sondern daß der Kreis um den Kugelmittelpunkt durch diese beiden Punkte (der sogenannte Großkreis) eine kürzere Verbindungskurve liefert.

Unser Hauptziel hier sind allerdings nicht Längenberechnungen, sondern die Berechnung von Oberflächen *bzw.* von Flüssen von Vektorfeldern durch diese Oberflächen. Dabei gehen wir genauso vor, wie bei der Transformationsformel im vorigen Abschnitt: Wir unterteilen den Parameterbereich $B$ durch Rechtecke, und betrachten deren Bilder auf dem Flächenstück. Diese sind, da wir $f$ als differenzierbar vorausgesetzt haben, in erster Näherung Parallelogramme, wobei die Näherung bei zunehmender Verfeinerung des Rechteckgitters auf $B$ immer besser wird. Der Flächeninhalt eines solchen Parallelogramms mit Kantenvektoren $f_u \cdot h$ und $f_v \cdot k$ ist

$$hk \cdot |f_u \times f_v| \;,$$

also sollte die Fläche des Flächenstücks gleich

$$\iint_B |f_u \times f_v|\;du\,dv$$

sein, und genau das definieren wir auch als den Flächeninhalt eines Flächenstücks.



**Definition:** Der Flächeninhalt eines Flächenstücks $f\colon B \to \mathbb{R}^3$ ist

$$\iint_f dO \underset{\text{def}}{=} \iint_B |f_u \times f_v|\;du\,dv\;.$$

(Das $O$ in $dO$ soll dabei an Oberfläche erinnern.)

Zur Kontrolle, ob diese Definition sinnvoll sein kann, berechnen wir die Oberfläche der Kugel: Hier ist, wie wir bereits wissen,

$$f_\varphi \times f_\vartheta = \begin{pmatrix} R^2 \cos\varphi \sin^2\vartheta \\ R^2 \sin\varphi \sin^2\vartheta \\ R^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \end{pmatrix} = R\sin\vartheta \cdot f(\varphi,\vartheta)\,;$$

die Länge dieses Vektors ist also, da $f(\varphi,\vartheta)$ als Radiusvektor natürlich die Länge $R$ haben muß, gleich $R^2 \sin\vartheta$. Die Oberfläche der Kugel berechnet sich daher zu

$$\begin{aligned}\iint_B R^2 \sin\vartheta &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi} R^2 \sin\vartheta\,d\vartheta\right)d\varphi \\ &= 2\pi \cdot R^2 \cdot (-\cos\pi + \cos 0) = 4\pi R^2\,,\end{aligned}$$

womit wir uns wieder einmal in hundertprozentiger Übereinstimmung mit der Schulmathematik befinden.

Genau wie Kurvenintegrale sind auch Oberflächenintegrale unabhängig von der Parametrisierung des Flächenstücks; im wesentlichen geht alles genau wie bei den Kurvenintegralen, ist aber etwas aufwendiger. Der Vollständigkeit halber sei die entsprechende Aussagen samt Beweis im Kleindruck abgedruckt:

**Lemma:** $f\colon B \to \mathbb{R}^3$ und $g\colon B' \to \mathbb{R}^3$ seien zwei Flächenstücke, für die es eine in einer Umgebung von $B$ stetig differenzierbare Funktion $\varphi$ gebe, die $B$ bijektiv auf $B'$ abbildet derart, daß $g = f \circ \varphi$ ist. Dann ist

$$\iint_f du\,dv = \iint_g du\,dv\;.$$

*Beweis:* Nach Definition ist

$$\iint_f dO = \iint_B |f_u \times f_v|\;du\,dv \quad \text{und} \quad \iint_g dO = \iint_B |g_u \times g_v|\;du\,dv\;.$$

Wenn wir die drei Komponenten von $f$ *bzw.* $g$ mit $f^{(x)}, f^{(y)}, f^{(z)}$ *bzw.* $g^{(x)}, g^{(y)}, g^{(z)}$ bezeichnen, ist

$$f_u \times f_v = \begin{pmatrix} f_u^{(y)} f_v^{(z)} - f_u^{(z)} f_v^{(y)} \\ f_u^{(z)} f_v^{(x)} - f_u^{(x)} f_v^{(z)} \\ f_u^{(x)} f_v^{(y)} - f_u^{(y)} f_v^{(x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} f_u^{(y)} & f_v^{(y)} \\ f_u^{(z)} & f_v^{(z)} \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} f_u^{(z)} & f_v^{(z)} \\ f_u^{(x)} & f_v^{(x)} \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} f_u^{(x)} & f_v^{(x)} \\ f_u^{(y)} & f_v^{(y)} \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

und genau entsprechend natürlich auch für $g$. Die links stehenden Determinanten sind offensichtlich gerade die Determinaten der JACOBI-Matrizen der verschiedenen zweidimensionalen Projektionen von $f$; an der ersten Stelle etwa die der Funktion

$$f^{(yz)} \underset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} f^{(y)} \\ f^{(z)} \end{pmatrix} : B \to \mathbb{R}^2 .$$

Analog dazu definieren wir auch Funktionen $f^{(zx)}, f^{(xy)}$ und die entsprechenden Funktionen für $g$.

Aus $g = f \circ \varphi$ folgt, daß auch $g^{(x)} = f^{(x)} \circ \varphi$ und entsprechend für die anderen Komponenten. Damit ist auch $f^{(yz)} = g^{(yz)} \circ \varphi$ *usw.*

Nach der zweidimensionalen Kettenregel ist dann

$$J_{g^{(yz)}} = \left(J_{f^{(yz)}} \circ \varphi\right) \cdot J_\varphi ,$$

also ausgeschrieben

$$\begin{pmatrix} g_u^{(y)} & g_v^{(y)} \\ g_u^{(z)} & g_v^{(z)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u^{(y)} \circ \varphi & f_v^{(y)} \circ \varphi \\ f_u^{(z)} \circ \varphi & f_v^{(z)} \circ \varphi \end{pmatrix} \cdot J_\varphi .$$

Entsprechendes gilt auch für die anderen Indexkombinationen, und nach dem Multiplikationssatz für Determinanten gilt eine entsprechende Produktbeziehung auch für die Determinaten der hier stehenden Matrizen; insgesamt erhalten wir also, daß

$$g_u \times g_v = \Big((f_u \circ \varphi) \times (f_v \circ \varphi)\Big) \cdot \det J_\varphi$$

ist und dementsprechend

$$|g_u \times g_v| = \Big((f_u \circ \varphi) \times (f_v \circ \varphi)\Big) \cdot |\det J_\varphi| .$$

Damit folgt die Behauptung aus der Transformationsformel. ■

Die Berechnung von Vektorprodukten ist etwas umständlich und sehr anfällig für Vorzeichenfehler; wir wollen daher sehen, daß die Fundamentalgrößen einer Fläche ihrem Namen gerecht werden und uns auch diese Berechnung abnehmen können: Der Flächeninhalt eines Parallelogramms mit Kantenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gleich dem Produkt der Längen



der beiden Vektoren mal dem Sinus des eingeschlossenen Winkels $\alpha$. Das Quadrat des Flächeninhalts ist also

$$(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})\sin^2\alpha = (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})(1-\cos^2\alpha)$$
$$= (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})\cos^2\alpha = (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 ,$$

und der Flächeninhalt selbst somit

$$\sqrt{(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2} .$$

Wir interessieren uns für das Parallelogramm mit Kantenvektoren $h \cdot f_u$ und $k \cdot f_v$; hier wird diese Formel zu

$$hk \cdot \sqrt{(f_u\cdot f_u)(f_v\cdot f_v) - (f_u\cdot f_v)^2} = hk\sqrt{EG-F^2} .$$

Die Fläche eines Flächenstücks kann also auch berechnet werden als

$$\iint_B \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv .$$

Im konkreten Fall steht hier natürlich genau dasselbe Integral wie bei der Formel mit dem Betrag des Vektorprodukts, allerdings erfordert diese Formel, sofern man die Fundamentalgrößen einer Fläche bereits kennt, deutlich weniger Rechenaufwand. Dem Leser sei empfohlen, sich am Beispiel der Kugeloberfläche hiervon zu überzeugen!

Obwohl wir uns auf Flächen im $\mathbb{R}^3$ beschränken wollen, sei hier zumindest kurz darauf hingewiesen, daß wir bei der Herleitung dieser neuen Darstellung des Flächeninhalts nirgends benutzen mußten, daß wir im $\mathbb{R}^3$ sind; diese Formel gilt also auch für Flächenstücke im $\mathbb{R}^n$ mit $n > 3$.

Eine für uns wichtige Besonderheit, die *nur* im $\mathbb{R}^3$ gilt, ist dagegen die Tatsache, daß wir jedem Flächenstück eine eindeutig bestimmte Normalenrichtung zuordnen können: Im Dreidimensionalen gibt es nur eine Richtung, die auf der Tangentialebenen eines Flächenstücks senkrecht steht; in Dimension $n > 3$ gibt es dagegen einen ganzen $(n-2)$-dimensionalen Raum mit dieser Eigenschaft.

Wenn wir von der Parameterdarstellung $f: D \to B$ eines regulären Flächenstücks im $\mathbb{R}^3$ und einer festen Reihenfolge der Parameter ausgehen, können wir sogar unterscheiden, nach welcher Seite diese Richtung sich von der Fläche entfernt: Die Tangentialebene wird aufgespannt von den partiellen Ableitungen $f_u$ und $f_v$ von $f$ nach den beiden Parametern $u, v$ auf $D \subseteq \mathbb{R}^2$, und das Kreuzprodukt $f_u \times f_v$ liefert einen Vektor, der auf diesen beiden Tangentialvektoren und somit der gesamten Tangentialebenen senkrecht steht.

Damit können wir jedem Punkt eines *regulären* Flächenstücks eine eindeutig bestimmte Normalenrichtung zuordnen. Man beachte, daß dies nur möglich ist aufgrund der Forderungen, die wir an ein reguläres Flächenstück gestellt haben: Die Abbildung $f$ muß injektiv sein, so daß die Parameterwerte $(u, v)$ zu jedem Punkt des Flächenstücks eindeutig bestimmt sind, und $f_u \times f_v$ darf nirgends verschwinden, da der Nullvektor keine wohlbestimmte Richtung hat.

Typisches Beispiel eines nichtregulären Flächenstücks ist das MÖBIUS-Band

$$f\colon D = [0,1] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3; \quad (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} (2 + u\cos v)\,\cos 2v \\ (2 + u\cos v)\,\sin 2v \\ u \sin v \end{pmatrix},$$

das durch Zusammenkleben der Enden eines einmal verdrillten rechteckigen Streifens entsteht. Hier ist $f$ für $u = 0$ nicht injektiv, denn $f(0, v) = f(0, v + \pi)$; wir haben also kein reguläres Flächenstück. In der Tat wir für die Parameterwerte $(0, v)$ der Mittelkreis des Bandes zweimal durchlaufen. Dort ist

$$f_u(0, v) = \begin{pmatrix} \cos v \cos 2v \\ \cos v \sin 2v \\ \sin v \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_v(0, v) = \begin{pmatrix} -4 \sin 2v \\ 4 \cos 2v \\ 0 \end{pmatrix},$$

also

$$f_u(0, v) \times f_v(0, v) = \begin{pmatrix} -4 \sin v \cos 2v \\ -4 \sin v \sin 2v \\ 4 \cos v \end{pmatrix}$$

und damit

$$f_u(0, v) \times f_v(0, v) = -f_u(0, v + \pi) \times f_v(0, v + \pi)\,.$$

es gibt also auf dem Mittelkreis keine eindeutig bestimmte Normalenrichtung.

Für Kurven hatten wir einerseits RIEMANN-STIELTJES-Integrale definiert, die für eine beliebige Funktion auf der Kurve erklärt sind und in deren Definition die Länge des Tangentenvektors eingeht; andererseits hatten wir Integrale über Vektorfelder, in deren Definition der Tangentenvektor selbst einging. Genauso gehen wir auch hier bei den Oberflächenintegralen vor, nur daß wir jetzt den Normalenvektor anstelle des Tangentenvektors benutzen:



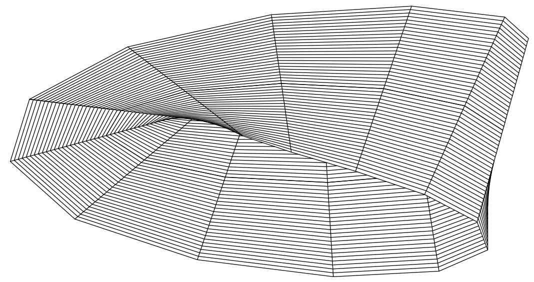

Abb. 61: Das Möbiusband

**Definition:** $f\colon D \to \mathbb{R}^3$ sei ein reguläres Flächenstück.
*a)* Ist $g$ eine auf $f(D)$ definierte stetige Funktion, so bezeichnen wir

$$\iint_f g\, dO \underset{\text{def}}{=} \iint_D g\big(f(u, v)\big)\ |f_u(u, v) \times f_v(u, v)|\ du\, dv$$

als *Oberflächenintegral* von $g$ über $f$.
*b)* Ist $\vec{V}$ ein in einer Umgebung von $f(D)$ definiertes Vektorfeld, so bezeichnen wir

$$\iint_f \vec{V} \cdot d\vec{O} \underset{\text{def}}{=} \iint_D \vec{V}\big(f(u, v)\big) \cdot \big(f_u(u, v) \times f_v(u, v)\big)\, du\, dv$$

als den *Fluß* des Vektorfelds $\vec{V}$ durch die Oberfläche $f$.

Eine unproblematische Verallgemeinerung des obigen Lemmas zeigt, daß auch diese Integrale im dort definierten Sinne unabhängig von der Parametrisierung sind.

Der Name *Fluß* für das unter *b)* definierte Integral wird klar, wenn man sich $f$ etwa als eine Kugeloberfläche vorstellt. In jedem Punkt $\boldsymbol{x}$ auf dieser Oberfläche kann man ein kartesisches Koordinatensystem aus einem Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_{\boldsymbol{x}}$ und zwei Tangenteneinheitsvektoren verankern. Drückt man nun den Vektor $\vec{V}(\boldsymbol{x})$ in diesem Koordinatensystem aus, so beschreibt die $\vec{n}_{\boldsymbol{x}}$-Komponente jenen Teil des Vektors, der durch die Kugeloberfläche hindurch nach innen oder außen geht (welches von beiden hängt ab vom Vorzeichen der Komponente und von der Orientierung des Normaleneinheitsvektors), während die beiden anderen Komponenten den Teil beschreiben, der auf der Oberfläche bleibt, also sozusagen den Fluß *auf* der Oberfläche im Gegensatz zum Fluß *durch* die Oberfläche. Letzterer läßt sich berechnen als das Skalarprodukt $\vec{V}(\boldsymbol{x}) \cdot \vec{n}_x$ mit dem Normaleneinheitsvektor, und das Integral über diese Funktion ist

$$\iint\limits_f (\vec{V} \cdot \vec{n}_{\boldsymbol{x}})\, dO = \iint\limits_f \vec{V} \cdot d\vec{O}\,,$$

denn

$$f_u \times f_v = |f_u \times f_v|\; \vec{n}_{\boldsymbol{x}}\,.$$

### f) Die Sätze von Stokes und Gauß

In diesem Abschnitt geht es um drei der zentralsten Sätze der mehrdimensionalen Analysis: Außer den beiden im Titel erwähnten Sätzen soll noch das mehrdimensionale Analogon des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung bewiesen werden.

Wir beginnen mit letzterem sowie dem Satz von STOKES: Bei beiden geht es darum, die Zirkulation eines Vektorfelds zu bestimmen. Beide Sätze gelten in beliebiger Dimension, jedoch wollen wir sie der Einfachheit halber nur für den $\mathbb{R}^3$ beweisen.

Ausgangspunkt ist ein reguläres Flächenstück $f\colon D \to \mathbb{R}^3$; dessen Bild $B = f(D)$, das „eigentliche" geometrische Flächenstück also, sei beschränkt und habe eine reguläre Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ als Rand. Wie schon mehrfach erwähnt, wollen wir Kurvenintegrale längs $\gamma$ mit Oberflächenintegralen über $f$ oder – wie wir wegen der Parameterunabhängigkeit auch einigermaßen korrekt sagen können – $B$ in Verbindung bringen.

Wir gehen also aus von einem Vektorfeld $\vec{V}\colon G \to \mathbb{R}^3$, dessen (offener) Definitionsbereich $G$ sowohl $B$ als auch $\gamma$ enthält, und wollen



Informationen über das Kurvenintegral

$$\int\limits_\gamma \vec{V}\, ds\,.$$

Dazu approximieren wir $B$ durch ein Flächenstück $B^*$, das wir aus endlich vielen ungefähr rechteckförmigen Teilmengen $R_i$ zusammensetzen können; ein grobes Bild einer solchen Unterteilung ist in Abbildung 43 zu sehen.

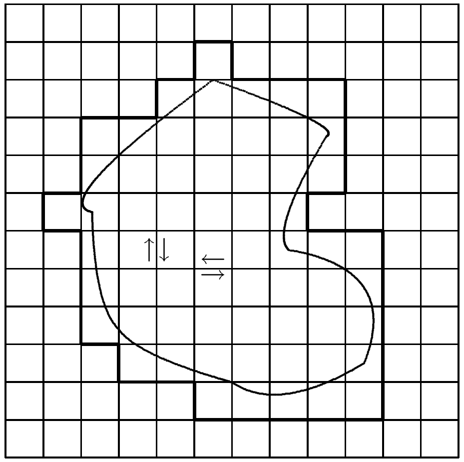

Abb. 43: Unterteilung eines Bereichs

Da $f$ als reguläres Flächenstück vorausgesetzt war, ist überall in $B$ ein wohldefinierter Normalenvektor bestimmt; damit können wir auch für jedes der Rechtecke einen Umlaufsinn festlegen: Dieser soll, wenn man von der Spitze des Normalenvektors aus auf des Rechteck schaut, der Gegenuhrzeigersinn sein. Da der Normalenvektor eines regulären Flächenstücks stetig von den Parametern der Fläche abhängt und nirgends verschwindet, ist es gleichgültig, über welchem Punkt eines (hinreichend kleinen) Rechtecks wir ihn betrachten.

In Abbildung 43 wurde davon ausgegangen, daß alle Normalenvektoren nach oben zeigen; der entsprechende Umlaufsinn ist für einige der

Rechteckkanten eingezeichnet. Wie man sieht, wird jede gemeinsame Kante zweier benachbarter Rechtecke von diesen beiden Rechtecken in verschiedener Weise orientiert. Falls wir daher für jedes Rechteck $R_i$ das Wegintegral entlang seines Rands berechnen und alle diese Integrale aufaddieren, bleiben nur die Integrale längs der in Abbildung 43 fett ausgezogenen Kanten erhalten, d.h.

$$\sum_{i=1}^{M} \int_{\partial R_i} \vec{V}\,ds = \int_{\partial B^*} \vec{V}\,ds\,,$$

wobei $M$ die Anzahl der „Rechtecke" $R_i$ bezeichnet. Natürlich ist erst recht für jede Funktion $h$ auf $B^*$

$$\sum_{i=1}^{M} \iint_{R_i} h\,dO = \iint_{B^*} h\,dO\,,$$

wenn wir eine Formel für die einzelnen Rechtecke $R_i$ haben, gilt diese also automatisch auch für $B^*$ und somit, nach einem Grenzübergang, auch für $B$.

Betrachten wir also ein festes Rechteck $R_i$ und das Kurvenintegral entlang seines Umfangs. Da wir die Rechtecke als klein voraussetzen, können wir $\vec{V}(\boldsymbol{x})$ auf $R_i$ ohne großen Fehler linearisieren.

Dazu sei $\boldsymbol{x}_i \in R_i$ ein beliebiger Punkt des Rechtecks. Ein beliebiger Punkt $\boldsymbol{x} \in R_i$ hat dann die Form $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_i + \vec{h}$ mit einem nicht allzu großen Vektor $\vec{h}$. Nach Definition der Differenzierbarkeit ist dann

$$\begin{aligned}\vec{V}(\boldsymbol{x}) &= \vec{V}(\boldsymbol{x}_0+\vec{h}) = \vec{V}(x_0) + J_{\vec{V}}(\boldsymbol{x}_0)\vec{h} + o\big(|\vec{h}|\big)\\ &= \vec{V}(\boldsymbol{x}_0) + S\cdot\vec{h} + \tfrac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{V}(\boldsymbol{x}_0)\times h + o\big(|\vec{h}|\big)\,,\end{aligned}$$

wobei $S$ für den symmetrischen Anteil der JACOBI-Matrix $J_{\vec{V}}(\boldsymbol{x}_0)$ steht.



Wenn wir den Term $o\big(|\vec{h}|\big)$ vernachlässigen, ist also

$$\begin{aligned}\int_{\partial R_i} \vec{V}(\boldsymbol{x})\,ds &= \int_{\partial R} \vec{V}(\boldsymbol{x}_0+\vec{x})\,ds\\ &\approx \int_{\partial R} \vec{V}(\boldsymbol{x}_0)\,ds + \int_{\partial R} S\vec{x}\,ds + \tfrac{1}{2}\int_{\partial R} \operatorname{rot}\vec{V}(\boldsymbol{x}_0)\times\vec{x}\,ds\,,\end{aligned} \tag{$*$}$$

wobei $R$ das um den negativ genommenen Ortsvektor von $\boldsymbol{x}_0$ verschobene Rechteck $R_i$ sei, d.h., wenn $\boldsymbol{x}$ den Rand von $R$ durchläuft, durchläuft $\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}$ den Rand von $R_i$.

Das erste Integral in dieser Summe ist ein Kurvenintegral über das konstante Vektorfeld, das jedem Punkt den Vektor $\vec{V}(\boldsymbol{x}_0)$ zuordnet. Dieses Vektorfeld ist offensichtlich ein Potentialfeld, denn sind $V_1, V_2$ und $V_3$ die Komponenten dieses Vektors, so ist

$$\operatorname{grad}\big(\vec{V}(\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{x}\big) = \operatorname{grad}(V_1x+V_2y+V_3z) = \vec{V}(x_0)\,.$$

Genauso ist auch $S\vec{h}$ ein Potentialfeld, denn der Gradient der quadratischen Form

$$\begin{aligned}{}^t\vec{x}S\vec{x} &= S_{11}x^2 + S_{22}y^2 + S_{33}z^2\\ &\quad + (S_{12}+S_{21})xy + (S_{13}+S_{31})xz + (S_{23}+S_{32})yz\end{aligned}$$

ist wegen $S_{k\ell} = S_{\ell k}$ gleich dem Zweifachen dieses Vektorfelds.

Damit sind also die beiden Vektorfelder $\vec{V}(x_0)$ und $S\vec{x}$ zirkulationsfrei, und die Integrale über den (als Kurve geschlossenen) Rand von $R_i$ verschwinden.

Damit haben wir (bis auf die hier unterdrückten, für einen richtigen Beweis aber unbedingt notwendige Abschätzung der Fehlerterme) den folgenden Satz bewiesen:

**Satz:** Das Vektorfeld $\vec{V}\colon G \to \mathbb{R}^3$ habe eine symmetrische JACOBI-Matrix, d.h. $\operatorname{rot}\vec{V}$ sei identisch null. Dann gilt für jedes reguläre

Flächenstück $f\colon D \to G$, dessen Rand eine Kurve $\gamma$ ist,

$$\int_\gamma \vec{V}\,ds = 0\,.$$

Denn nach obiger Rechnung verschwindet bei symmetrischer JACOBI-Matrix das Kurvenintegral entlang eines jeden Rechtecks, und die Summe all dieser Kurvenintegrale konvergiert bei immer feinerer Rechteckunterteilung des Flächenstücks gegen das Kurvenintegral längs des Rands $\gamma$ von $B = f(D)$.

Dies reicht schon für den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung im $\mathbb{R}^3$: Wir wissen bereits, daß ein Vektorfeld genau dann eine Stammfunktion hat, wenn es zirkulationsfrei ist – die eine Richtung dieser Aussage haben wir gerade wieder angewandt. Außerdem wissen wir, daß für ein Vektorfeld mit Stammfunktion die Rotation verschwindet, denn für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $\varphi$ ist $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0$. Für ein leicht nachprüfbares Kriterium zur Existenz einer Stammfunktion fehlt also nur noch die Aussage, daß aus dem Verschwinden der Rotation die Zirkulationsfreiheit folgt.

Diese Aussage ist aber leider falsch: Das Beispiel des Magnetfelds eines stromdurchflossenen Leiters zeigte, daß die Rotation sehr wohl identisch verschwinden kann, ohne daß das Vektorfeld zirkulationsfrei ist. Dieses Magnetfeld $\vec{V}(x,y,z) = \frac{c}{x^2+y^2}\binom{-y}{x}$ ist allerdings auf der $z$-Achse nicht definiert, und wir hatten im Beispiel Kreise um die $z$-Achse betrachtet.

Bei einem überall definiertes Vektorfeld hätten wir für einen solchen Kreis einfach die geschlossene Kreisscheibe $B$ betrachten können, deren Rand der betrachtete Integrationsweg ist, und nach obigem Satz wäre das Integral längs des Randes verschwunden.

Das Problem bei diesem Gegenbeispiel liegt also offensichtlich darin, daß der betrachtete Integrationsweg nicht als Rand eines regulären Flächenstücks im Definitionsbereich des Vektorfelds geschrieben werden kann: Da das Vektorfeld auf der $z$-Achse nicht definiert ist, muß der Schnittpunkt mit der $z$-Achse aus der Kreisscheibe herausgenommen werden, wir haben also nur noch einen punktierten Kreis, und dessen Rand besteht aus der Kreislinie *plus* dem herausgenommenen Punkt.



Um solche Fälle auszuschließen definieren wir:

**Definition:** Eine offene zusammenhängende Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt *einfach zusammenhängend,* wenn jede geschlossene Kurve $\gamma$ in $G$ Rand eines regulären Flächenstücks ist. Anschaulich kann man dies auch so interpretieren, daß die Kurve innerhalb von $G$ auf einen Punkt zusammengezogen werden kann: Man denke sich die Kurve als einen stark angespannten Gummiring; wenn man diesen auf ein Flächenstück legt, zieht er sich automatisch zusammen. Umgekehrt überstreicht der Ring beim Zusammenziehen auf einen Punkt ein Flächenstück, dessen Rand die Ausgangsposition des Gummis ist.

Mit dieser Definition gilt dann offensichtlich die folgende Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung auf den $\mathbb{R}^3$:

**Satz:** Ein differenzierbares Vektorfeld $\vec{V}\colon G \to \mathbb{R}^3$ auf einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^3$ hat genau dann eine Stammfunktion, wenn $\operatorname{rot}\vec{V}$ dort identisch verschwindet, d.h. also, wenn die JACOBI-Matrix symmetrisch ist. ■

Für ein ebenes Vektorfeld gilt entsprechend

**Satz:** Ein differenzierbares Vektorfeld $\vec{V}\colon G \to \mathbb{R}^2$ auf einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^2$ hat genau dann eine Stammfunktion, wenn

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x}$$

dort identisch verschwindet, d.h. also, wenn die JACOBI-Matrix symmetrisch ist.

*Beweis:* Dies folgt sofort aus dem Satz von GREEN. ■

Auf höhere Dimension soll nicht genauer eingegangen werden; nur soviel sei erwähnt: Die eindeutige Bestimmtheit des Normalenvektors eines Flächenstücks im $\mathbb{R}^3$ hat in höheren Dimensionen keine Entsprechung mehr; dort muß man von einem Flächenstück explizit *fordern,* daß es orientierbar ist im folgenden Sinne: Man kann es durch kleine rechteckförmige Flächen überdecken und jedem dieser „Rechtecke" einen Umlaufsinn zuordnen derart, daß die gemeinsame Kante zweier Nachbarrechtecke von diesen beiden Rechtecken entgegengesetzt orientiert wird.

Wenn man dann den einfachen Zusammenhang einer offenen zusammenhängenden Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ dadurch definiert, daß jede geschlossene Kurve in $G$ Rand eines so orientierbaren Flächenstücks sein soll, was auch wieder im wesentlichen äquivalent ist zur Zusammenziehbarkeit der Kurve, gilt auch hier der

**Satz:** Ein differenzierbares Vektorfeld $\vec{V}: G \to \mathbb{R}^n$ auf einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ hat genau dann eine Stammfunktion, wenn die JACOBI-Matrix von $\vec{V}$ symmetrisch ist. ∎

Damit genug zum ersten der drei Hauptsätze dieses Paragraphen; wir machen weiter, wo wir vor der Spezialisierung auf symmetrische Vektorfelder aufgehört haben und folgern, daß nach (∗) für ein beliebiges differenzierbares Vektorfeld gilt

$$\int\limits_{\partial R_i} \vec{V}(\boldsymbol{x})\,ds \approx \tfrac{1}{2} \int\limits_{\partial R} \operatorname{rot} \vec{V}(\boldsymbol{x}_0) \times \vec{x}\,ds\;;$$

wir müssen uns also dieses Integral genauer ansehen. Dabei setzen wir zur Abkürzung

$$\vec{a} = \operatorname{rot} \vec{V}(x_0)\;;$$

dann ist der Integrand

$$\tfrac{1}{2}(\vec{a} \times \vec{x}) \cdot ds\,.$$

Nach Definition eines Kurvenintegrals ist das Integral hierüber Grenzwert einer Summe von Termen der Art

$$\tfrac{1}{2}(\vec{a} \times \vec{x}_j) \cdot \vec{t}_j\,,$$

wobei $\boldsymbol{x}_j$ Punkte auf der Kurve sind und $t_j$ die Tangentenvektoren in diesen Punkten. Dieses Skalarprodukt eines Vektorprodukts mit einem Vektor ist bekanntlich das *Spatprodukt,* und es ist gleich der Determinante mit den Spaltenvektoren $\vec{a}, \vec{x}_j$ und $t_j$. Diese Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn man zwei Spalten vertauscht; tut man dies zweimal, kehrt sie wieder zu ihrem alten Wert zurück. Daher ist

$$(\vec{a} \times \vec{x}_j) \cdot \vec{t}_j = (\vec{x}_j \times \vec{t}_j) \cdot \vec{a}\,.$$

Der Vektor $\vec{x}_j \times \vec{t}_j$ steht senkrecht auf $\vec{x}_j$ und auf $\vec{t}_j$; falls wir also von einem *flachen* Rechteck ausgehen, steht er auch senkrecht auf diesem und hat somit die Richtung des Normalenvektors. Sein Betrag ist gleich der Fläche des von $\vec{x}_j$ und $\vec{t}_j$ aufgespannten Parallelogramms, die Hälfte davon also gleich der Fläche des von diesen beiden Vektoren aufgespannten Dreiecks. Die Summe aller dieser Dreiecksflächen ist im Limes gleich der Fläche des Rechtecks, über dessen Rand wir integrieren, also ist das Integral über den Rand des Rechtecks für kleine Rechtecke näherungsweise gleich einem Skalarprodukt $\vec{n} \cdot \vec{a}$, wobei $\vec{n}$ als Länge den Flächeninhalt des Rechtecks hat und als Richtung die des Normalenvektors. Als Grenzwert einer Summe solcher Skalarprodukte ist aber gerade das Integral

$$\iint\limits_f \operatorname{rot} \vec{V}\,d\vec{O}$$

erklärt; wenn wir immer feinere Rechteckunterteilungen betrachten, konvergiert die Summe der Kurvenintegrale über die Ränder dieser Rechtecke also einerseits gegen das Kurvenintegral des Vektorfelds über den Rand $\gamma$ des betrachteten Flächenstücks, andererseits aber auch gegen das Integral der Rotation von $\vec{V}$ über das Flächenstück selbst. Dies ist der

**Satz von Stokes:** $\vec{V}: G \to \mathbb{R}^3$ sei ein differenzierbares Vektorfeld auf der offenen Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^3$. Weiter sei $f: D \to G$ ein reguläres Flächenstück mit einer stückweise regulären Kurve $\gamma$ als Rand. Dann ist

$$\int\limits_\gamma \vec{V}\,ds = \iint\limits_f \operatorname{rot} \vec{V}\,d\vec{O}\,.$$

GEORGE GABRIEL STOKES (1819–1903) wurde in Irland geboren als jüngster von sechs Söhnen eines protestantischen Pfarrers. Nach dem Tod seines Vaters kam er im Alter von 16 Jahren an eine Schule nach Bristol in England und begann zwei Jahre später sein Studium an der Universität Cambridge. Er wurde vor allem bekannt durch seine Arbeiten zur mathematischen Physik, für die er viele mathematische Techniken entwickelte. Er gilt als der Begründer sowohl der Strömungslehre als auch der Geodäsie und hatte unter anderem großen Einfluß auf die Entwicklung von MAXWELL. Ab 1849 lehrte er als Professor an der Universität Cambridge.

Aus dem Satz von STOKES können wir eine neue Charakterisierung der Rotation herleiten:

**Satz:** $\vec{V}: G \to \mathbb{R}^3$ sei ein differenzierbares Vektorfeld, $\vec{e}$ ein Einheitsvektor, und $\gamma_{\vec{e},r}$ ein Kreis mit Radius $r$ um $\boldsymbol{x}_0$ ist, der in einer Ebenen senkrecht zu $\vec{e}$ liege und von $\vec{e}$ aus gesehen im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen werde; die gesamte von $\gamma_{\vec{e},r}$ berandete Kreisscheibe liege in $G$. Dann ist

$$\operatorname{rot} \vec{V}(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{\gamma_{\vec{e},r}} \vec{V}\, ds\,.$$

*Beweis:* $\gamma_{\vec{e},r}$ ist Rand einer Kreisscheibe $D$ vom Radius $r$ mit Flächeninhalt $\pi r^2$; nach dem Satz von STOKES ist

$$\int\limits_{\gamma_{\vec{e},r}} \vec{V}\, ds = \iint\limits_{D} \operatorname{rot} \vec{V}\, d\vec{O} = \iint\limits_{D} (\operatorname{rot} \vec{V}) \cdot \vec{e}\, dO\,,$$

und für immer kleiner werdende Werte von $r$ stimmt dies immer besser überein mit $\operatorname{rot} \vec{V}(\boldsymbol{x}_0) \cdot \vec{e}$ mal dem Flächeninhalt der Kreisscheibe. ■

Falls die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt sind, falls also insbesondere die Kreislinie Rand einer im Definitionsbereich von $\vec{V}$ enthaltenen Fläche ist, läßt sich die Rotation somit als Limes einer Art „normierter" Zirkulation auffassen, d.h. als Integral längs einer geschlossenen Kurve dividiert durch die Länge dieser Kurve. Die Rotation gibt also auch ein Maß für die Abweichung eines Vektorfelds von der Zirkulationsfreiheit.



Damit wäre auch der zweite Hauptsatz dieses Abschnitts bewiesen; bleibt noch der

**Satz von Gauß:** $\vec{W}: G \to \mathbb{R}^3$ sei ein differenzierbares Vektorfeld und $f: D \to G$ sei ein reguläres Flächenstück derart, daß $B = f(D)$ Rand eines beschränkten dreidimensionalen Bereichs $V$ sei. Dann ist

$$\iint\limits_{f} \vec{W}\, d\vec{O} = \iiint\limits_{V} \operatorname{div} \vec{W}\, dx\, dy\, dz\,.$$

**Bemerkung:** Der Satz gilt auch, mit den offensichtlichen Definitionen, falls der Rand von $V$ kein Flächen*stück* ist, sondern eine Fläche, die aus endlich vielen regulären Stücken zusammengesetzt ist. Am Beweis ändert sich dabei abgesehen vom größeren Schreibaufwand praktisch nichts.

Der *Beweis* des Satzes von GAUSS beruht auf derselben Idee wie der des Satzes von STOKES: Dort hatten wir ein Flächenstück durch Rechtecke angenähert, um das Kurvenintegral längs seines Randes zu einem Integral über das Flächenstück in Beziehung zu setzen; hier unterteilen wir entsprechend das Volumen $V$ in kleine, der Einfachheit halber als achsenparallel vorausgesetzte Quader, um das Oberflächenintegral über den Rand von $V$ mit einem Integral über $V$ in Beziehung zu setzen.

Ein solcher Quader sei $Q_i$, und $\vec{h}, \vec{k}, \vec{\ell}$ seien die drei Kantenvektoren von $Q_i$ in Richtung der $x$-, $y$- und $z$-Achse. Dann ist das Integral von $\vec{W}$ über die Oberfläche von $Q_i$ gleich

$$\iint\limits_{\partial Q_i} \vec{W}\, d\vec{O} = \iint\limits_{\substack{\text{vordere und}\\ \text{hintere Seitenfläche}}} \vec{W}\, d\vec{O} + \iint\limits_{\substack{\text{linke und}\\ \text{rechte Seitenfläche}}} \vec{W}\, d\vec{O} + \iint\limits_{\substack{\text{obere und}\\ \text{untere Seitenfläche}}} \vec{W}\, d\vec{O}\,,$$

und weiter ist beispielsweise

$$\iint\limits_{\substack{\text{linke und}\\ \text{rechte Seitenfläche}}} \vec{W}\, d\vec{O} = \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} \vec{W}\, d\vec{O} + \iint\limits_{\substack{\text{rechte}\\ \text{Seitenfläche}}} \vec{W}\, d\vec{O}$$

$$= \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} \vec{W}(\boldsymbol{x})\, d\vec{O} - \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} \vec{W}(\boldsymbol{x}+\vec{h})\, d\vec{O}$$

$$= - \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} \big(\vec{W}(\boldsymbol{x}+\vec{h}) - \vec{W}(\boldsymbol{x})\big)\, d\vec{O}\,,$$

denn da alle Normalenvektoren nach außen zeigen, sind die linke und die rechte Seite des Quaders verschieden orientiert.

Nun kommt die Differenzierbarkeit von $\vec{W}$ ins Spiel und sagt uns, daß

$$\vec{W}(\boldsymbol{x}+\vec{h}) = \vec{W}(\boldsymbol{x}) + J_{\vec{W}}(\boldsymbol{x}) \cdot \vec{h} + o\big(|\vec{h}|\big)$$

ist. Da der Vektor $\vec{h}$ in Richtung der $x$-Achse zeigt, können wir das (mit $h = \left|\vec{h}\right|$) auch einfacher schreiben als

$$\vec{W}(x+h, y, z) = \vec{W}(x, y, z) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{W}\right) \cdot h + o(h)\,,$$

wobei die partielle Ableitung von $\vec{W}$ nach $x$ für jenes Vektorfeld stehen soll, dessen Komponenten die partiellen Ableitungen der entsprechenden Komponenten von $\vec{W}$ sind. Da wir in diesem Semester noch viel zu tun haben, vernachlässigen wir den Term $o(h)$ in der Hoffnung, daß er für immer feiner werdende Unterteilungen trotz der dann ansteigenden *Anzahl* dieser Terme keine Rolle mehr spielen wird.

In der Tat sollte ein mit den Abschätzungstechniken aus der Analysis I vertrauter Leser keine Schwierigkeiten haben, dies mathematisch streng zu zeigen. Die Heuristik, nach der man dabei vorgeht, ist (hoffentlich) klar: Die Anzahl aufeinanderliegender Quader in Richtung der $x$-Achse ist proportional zu $1/|\vec{h}|$, und $1/|\vec{h}|$ Terme der Größenordnung $o(|\vec{h}|$ addieren sich zu einem Term der Größenordnung $o(1)$, d.h. zu einer Funktion, die gegen Null geht. (Die Aussage „geht schneller als 1 gegen Null" ist natürlich gleichbedeutend damit, daß die Funktion überhaupt gegen Null geht.)



Der Einheitsnormalenvektor der linken Seite des Quaders zeigt in Richtung der negativen $x$-Achse, denn die linke Seite ist parallel zur $(y, z)$-Ebene und zeigt nach außen. Wenn wir den Einheitsvektor der $x$-Achse mit $\vec{e}_x$ bezeichnen, ist daher

$$d\vec{O} = -\vec{e}_x\, dy\, dz$$

und damit

$$\iint\limits_{\substack{\text{linke und}\\ \text{rechte Seitenfläche}}} \vec{W}\, d\vec{O} \approx - \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} \big(\vec{W}(\boldsymbol{x}+\vec{h}) - \vec{W}(\boldsymbol{x})\big)\, d\vec{O}\,,$$

$$= \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} h \cdot \frac{\partial}{\partial x}\vec{W} \cdot \vec{e}_x = h \cdot \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dx\, dy$$

$$= h \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} \frac{\partial V_1}{\partial x}\, dy\, dz\,.$$

Ganz entsprechend ist

$$\iint\limits_{\substack{\text{vordere und}\\ \text{hintere Seitenfläche}}} \vec{W}\, d\vec{O} \approx k \iint\limits_{\substack{\text{vordere}\\ \text{Seitenfläche}}} \frac{\partial V_2}{\partial y}\, dx\, dz$$

und

$$\iint\limits_{\substack{\text{obere und}\\ \text{untere Seitenfläche}}} \vec{W}\, d\vec{O} \approx \ell \iint\limits_{\substack{\text{obere}\\ \text{Seitenfläche}}} \frac{\partial V_3}{\partial z}\, dx\, dy\,.$$

Nach dem Mittelwertsatz für Flächenintegrale können wir diese Integrale weiter abschätzen: Es gibt Punkte $\xi$ auf der linken, $\eta$ auf der vorderen und $\zeta$ auf der unteren Seitenfläche, so daß

$$\iint\limits_{\substack{\text{linke und}\\ \text{rechte Seitenfläche}}} \vec{W}\, d\vec{O} \approx h \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} \frac{\partial V_1}{\partial x}\, dy\, dz$$

$$= h\frac{\partial V_1}{\partial x}(\xi) \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} dy\, dy = hkl\frac{\partial V_1}{\partial x}(\xi)\,.$$

Genauso ist

$$\iint\limits_{\substack{\text{vordere und}\\ \text{hintere Seitenfläche}}} \vec{W}\, d\vec{O} \approx hkl \frac{\partial V_2}{\partial y}(\eta)$$

und

$$\iint\limits_{\substack{\text{obere und}\\ \text{untere Seitenfläche}}} \vec{W}\, d\vec{O} \approx hkl \frac{\partial V_3}{\partial z}(\zeta)\,.$$

Nun ist es wieder an der Zeit, eine etwas komplexere Abschätzung unter den Tisch fallen zu lassen: Die Punkte $\xi, \eta$ und $\zeta$ liegen auf den Seitenflächen eines Quaders, der immer kleiner werden soll. Damit rücken auch diese Punkte immer weiter zusammen und wir sollten wohl keinen allzu großen Fehler machen, wenn wir einfach *irgendeinen* Punkt $\boldsymbol{x}_i$ im Quader $Q_i$ auswählen und sowohl $\xi, \eta$ als auch $\zeta$ durch diesen Punkt ersetzen; die formale Rechtfertigung hierfür geht wieder aus von der Differenzierbarkeit des Vektorfelds $V$ und beruht im übrigen auf Abschätzungen.

Wenn wir das alles glauben, ist also

$$\iint\limits_{\substack{\text{linke und}\\ \text{rechte Seitenfläche}}} \vec{W}\, d\vec{O} \approx hkl \frac{\partial V_1}{\partial x}(\boldsymbol{x}_i)\,,$$

$$\iint\limits_{\substack{\text{vordere und}\\ \text{hintere Seitenfläche}}} \vec{W}\, d\vec{O} \approx hkl \frac{\partial V_2}{\partial y}(\boldsymbol{x}_i) \quad \text{und}$$

$$\iint\limits_{\substack{\text{obere und}\\ \text{untere Seitenfläche}}} \vec{W}\, d\vec{O} \approx hkl \frac{\partial V_3}{\partial z}(\boldsymbol{x}_i)\,.$$

Das Oberflächenintegral über die gesamte Quaderoberfläche ist die Summe dieser drei Teilintegrale, und da bekanntlich

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}(\boldsymbol{x}_i) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(\boldsymbol{x}_i) + \frac{\partial V_3}{\partial z}(\boldsymbol{x}_i) = \operatorname{div} \vec{W}(\boldsymbol{x}_i)$$

ist, haben wir somit gezeigt, daß

$$\iint\limits_{\partial Q_i} \vec{W}\, d\vec{O} \approx hkl \operatorname{div} \vec{W}(\boldsymbol{x}_i) = \operatorname{div} \vec{W}(\boldsymbol{x}_i) \cdot vol(Q_i) \qquad (*)$$



ist.

Damit haben wir eine lokale Version des Satzes von GAUSS gezeigt; zum Beweis des Satzes selbst nähern wir das Volumen $V$ an durch die Quader $Q_i$. Dann ist

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{W}\, dx\, dy\, dz \approx \sum_i \operatorname{div} \vec{W}(\boldsymbol{x}_i) \cdot vol(Q_i)\,,$$

und wenn wir die Quader immer weiter verkleinern, wird im Limes aus dem Ungefährzeichen ein Gleichheitszeichen – genau so hatten wir schließlich Volumenintegrale definiert.

Im Falle des Integrals über die Randfläche $B = f(D)$ von $V$ ist die Situation etwas komplizierter: Wie beim Beweis des Satzes von STOKES überlegt man sich zunächst leicht, daß eine gemeinsame Seitenfläche zweier benachbarter Quader von den beiden Quadern verschieden orientiert wird, so daß sich die beiden Integrale über diese Fläche gegenseitig aufheben; die Summe über alle Oberflächenintegrale über die $Q_i$ ist also gleich der Summe über alle Oberflächenintegrale über jene Seitenflächen von Quadern $Q_i$, die nur Seitenfläche eines einzigen Quaders sind, d.h. also über die Randfläche der Vereinigung aller Quader $Q_i$.

Die Quaderflächen, die diesen Rand ausmachen, sind allesamt parallel zu Koordinatenebenen; ihre Normalenvektoren sind also parallel zu Koordinaten*achsen,* wohingegen die Normalenvektoren von $B$ natürlich beliebige Richtungen haben können. Wir müssen uns überlegen, warum die Integrale im Limes trotzdem gleich sein können.

Der Integrand bei einem Oberflächenintegral über ein Vektorfeld ist das Skalarprodukt aus dem Normalenvektor von $B$ im jeweils betrachteten Punkt und dem Wert $\vec{W}(\boldsymbol{x})$ des Vektorfelds in diesem Punkt. Konkret sei etwa $\vec{n}$ der Normalenvektor im Punkt $\boldsymbol{x} \in B$, und in Koordinaten sei

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{W}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \vec{W}(\boldsymbol{x}) \cdot \vec{n} &= v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3 \\ &= \vec{W}(\boldsymbol{x}) \cdot (n_1 \vec{e}_1) + \vec{W}(\boldsymbol{x}) \cdot (n_2 \vec{e}_2) + \vec{W}(\boldsymbol{x}) \cdot (n_3 \vec{e}_3)\,; \end{aligned}$$

wir erhalten also dasselbe Skalarprodukt auch, indem wir $\vec{W}(\boldsymbol{x})$ nacheinander mit geeigneten Normalenvektoren von Quaderflächen parallel zu den Koordinatenebenen multiplizieren und die Ergebnisse aufaddieren.

Falls $\vec{n}$ drei nichtverschwindende Komponenten hat, ist klar, daß die Fläche $B$ in der Nähe von $\boldsymbol{x}$ nur so durch Quader angenähert werden kann, daß es dort freie Randflächen parallel zu allen drei Koordinatenebenen gibt; ein nicht allzu schwieriges Argument über den Satz von PYTHAGORAS zusammen mit Limesbetrachtungen zeigt, daß auch mit den Längen alles gut geht, so daß auch das Oberflächenintegral über $B$ gleich der Summe der Integrale über die Quaderoberflächen ist.

Wie wir oben gesehen haben, ist der Satz für einen einzelnen Quader richtig; da auf beiden Seiten das Integral durch Summen entsprechender Integrale für Quader angehähert werden kann, ist also der Satz von GAUSS (modulo zahlreicher Auslassungen) bewiesen. ∎

Genau wie der Satz von STOKES zu einer alternativen Definition der Rotation führte, kann mit dem Satz von GAUSS die *Divergenz* auf andere Weise ausgedrückt werden; zumindest für Quader haben wir die entsprechende Formel im gerade beendeten Beweis als Formel $(*)$ bereits hergeleitet:

**Satz:** Für ein differenzierbares Vektorfeld $\vec{W}: G \to \mathbb{R}^3$ ist

$$\operatorname{div} \vec{W}(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{r\to 0} \frac{3}{4\pi r^3} \iint\limits_{\partial B_r} \vec{W}\, d\vec{O}\,,$$

wobei $B_r$ eine Kugel mit Radius $r$ um $\boldsymbol{x}_0$ ist, deren Normalenvektoren nach außen zeigen.

*Beweis:* Nach dem Mittelwertsatz ist das Volumenintegral über $B_r$ gleich dem Produkt des Volumens $\frac{4}{3}\pi r^3$ von $B_r$ mit dem Wert des Integranden $\operatorname{div} \vec{W}$ an einem geeigneten Punkt der Kugel. Falls $r$ gegen Null geht, muß dieser Punkt immer näher an den Mittelpunkt der Kugel rücken, bis er im Limes mit diesem zusammenfällt. ∎

Auch der Satz von GAUSS läßt sich wieder anschaulich interpretieren: Bei der Definition der Divergenz haben wir uns bereits überlegt, daß



diese mißt, inwieweit ein Punkt eher eine Quelle oder eine Senke für ein Vektorfeld ist. Da das Oberflächenintegral gerade gleich dem Fluß des Vektorfelds durch die betrachtete Oberfläche ist und wir die Oberfläche so orientiert haben, daß der Normalenvektor nach außen zeigt, sagt der Satz von GAUSS also einfach, daß der gesamte Fluß eines Vektorfelds durch die Oberfläche eines Volumens $V$ genau das ist, was im Innern von $V$ erzeugt oder (bei negativen Vorzeichen auf beiden Seiten) vernichtet wird.

Der obige Satz zur Charakterisierung der Divergenz zeigt dementsprechend noch einmal, warum die Divergenz auch als *Quellendichte* bezeichnet wird: Nach dem Satz von GAUSS ist der Fluß durch die Oberfläche einer Kugel gleich der Summe des im Innern erzeugten oder vernichteten; dividiert man dies durch das Volumen der Kugel, entsteht die Quellen*dichte,* deren Grenzwert für immer kleiner werdende Kugeln gleich der Divergenz ist.