Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

2. April 2001

Modulklausur Höhere Mathematik II

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die Fourier-Reihe von $f(t) = \sin^2 t$ enthält keine Cosinusterme.

Lösung: *Falsch,* denn f ist eine nichtkonstante gerade Funktion. (Die Fourier-Reihe von f ist $\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t$.)

2) Richtig oder falsch: Die Fourier-Transformation definiert eine lineare Abbildung des Schwarz-Raums $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ auf sich selbst.

Lösung: *Richtig,* denn als Intergraltransformation ist die Fourier-Transformation linear, und laut Vorlesung liegt auch die Fourier-Transformierte einer Funktion aus dem Schwarz-Raum im Schwarz-Raum.

3) Richtig oder falsch: Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = \frac{5}{3}y(t)^{\frac{2}{5}}$ mit $y(0) = 0$ ist eindeutig lösbar.

Lösung: *Falsch,* beispielsweise sind $y(t) = t^{5/3}$ und $y(t) = 0$ zwei Lösungen.

4) Richtig oder falsch: Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist Hermitesch.

Lösung: *Falsch;* bei einer Hermiteschen Matrix muß die transponierte Matrix gleich der konjugiert komplexen sein.

5) Richtig oder falsch: Die Zahlen $(i, \frac{1}{i})$ für $1 \le i \le 100$ sind positiv korreliert.

Lösung: *Falsch;* wenn i größer wird, wird 1/i kleiner; die Paare sind also negativ korreliert.

Aufgabe 1: (*6 Punkte)*
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode zwei, und für $t \in [-1, 1]$ sei $f(t) = e^{|t|}$.

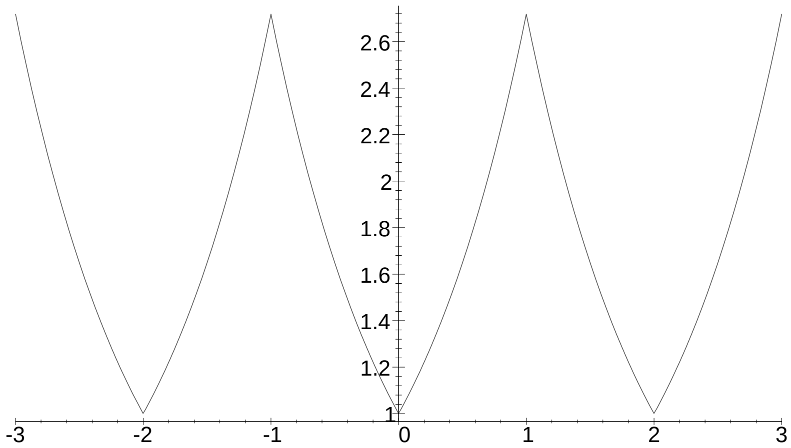
a) Skizzieren Sie f über dem Intervall $[-3, 3]$! Ist f gerade, ungerade oder keines von beiden?

Lösung:
f ist im Intervall $[-1, 1]$ gerade und somit, da dieses symmetrisch zur Null liegt, auf ganz $\mathbb{R}$; Skizze siehe nächste Seite.

b) Berechnen Sie die Fourier-Reihe von f!

Lösung: f hat die Periode $T = 2$, also die Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Da die Funktion gerade ist, gibt es in der Fourier-Reihe von f keine Sinusterme.
Der konstante Term ist

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{|t|}\,dt = \int_{0}^{1} e^t\,dt = e - 1\,.$$



Auch für die Berechnung der Cosinusterme läßt sich die Symmetrie ausnutzen:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} f(t)\cos k\omega t\,dt = \int_{-1}^{1} e^{|t|}\cos k\pi t\,dt = 2\int_{0}^{1} e^{t}\cos k\pi t\,dt \\
&= 2\int_{0}^{1} e^{t}\,\frac{e^{k\pi i t}+e^{-k\pi i t}}{2}\,dt = \int_{0}^{1}\left(e^{(1+k\pi i)t}+e^{(1-k\pi i)t}\right)dt = \frac{e^{(1+k\pi i)t}}{1+k\pi i}+\frac{e^{(1-k\pi i)t}}{1-k\pi i}\,dt\Bigg|_{0}^{1} \\
&= \frac{e^{1+k\pi i}-1}{1+k\pi i}+\frac{e^{1-k\pi i}-1}{1-k\pi i} = \frac{(-1)^k e-1}{1+k\pi i}+\frac{(-1)^k e-1}{1-k\pi i} \\
&= \left((-1)^k e-1\right)\left(\frac{1}{1+k\pi}+\frac{1}{1-k\pi}\right) = \frac{2\left((-1)^k e-1\right)}{1+k^2\pi^2}\,.
\end{aligned}$$

Die FOURIER-Reihe ist also $S_f(t) = e-1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k e-1}{1+k^2\pi^2}\cos k\pi t\,.$

c) Für welche $t\in\mathbb{R}$ konvergiert die FOURIER-Reihe gegen $f(t)$?

Lösung: Da f eine stetige stückweise differenzierbare Funktion ist, konvergiert die Reihe auf ganz $\mathbb{R}$.

d) An welchen Punkten tritt das GIBBS-Phänomen auf?

Lösung: *Nirgends,* denn f hat keine Sprungstellen.

Aufgabe 2: (*4 Punkte*)

a) Zeigen Sie: Die LAPLACE-Transformierte von $\cosh t = \frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$ ist $s/(s^2-1)$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cosh t\}(s) &= \int_0^\infty \cosh t\, e^{-st}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{t}e^{-st}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}e^{-st}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{(1-s)t}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-(1+s)t}\,dt = \frac{e^{(1-s)t}}{2(1-s)}\,\Bigg|_0^\infty - \frac{e^{-(1+s)t}}{2(1+s)}\,\Bigg|_0^\infty\,.
\end{aligned}$$

LAPLACE-Transformierte interessieren nur für den Fall, daß der Realteil von s nicht zu klein ist; für $\mathfrak{Re}\,s>1$ hat der Vorfaktor von t in beiden Stammfunktionen negativen Realteil, so daß die Grenzwerte für $t\to\infty$ verschwinden. Also ist

$$\mathcal{L}\{\cosh t\}(s) = -\frac{1}{2(1-s)}+\frac{1}{2(1+s)} = \frac{1}{2(s-1)}+\frac{1}{2(s+1)} = \frac{(s+1)+(s-1)}{2(s-1)(1+s)} = \frac{s}{s^2-1}\,.$$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y^{(3)}(t) + \dot{y}(t) = \cosh t$ mit $y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0$! Sie können bei *b)*, nicht aber bei *a)*, voraussetzen, daß $\mathcal{L}\{\sinh t - \sin t\}(s) = 2/(s^4 - 1)$ und $\mathcal{L}\{\cosh t - \cos t\}(s) = 2s/(s^4 - 1)$ ist.

Lösung: Ist $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ die LAPLACE-Transformierte der Lösungsfunktion $y(t)$, so ist

$$s^3Y(s) + sY(s) = \frac{s}{s^2+1} \quad \text{oder} \quad Y(s) = \frac{s}{(s^2-1)(s^3+1)} = \frac{1}{(s^2-1)(s^2+1)} = \frac{1}{s^4-1}\,.$$

Da $\mathcal{L}\{\sinh t - \sin t\}(s) = 2/(s^4 - 1)$ ist, folgt $y(t) = \dfrac{\sinh t - \sin t}{2}$.

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ und bestimmen Sie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

Lösung: Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 0 \\ -3 & -4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -3 & -4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)\big((2-\lambda)(-4-\lambda)+9\big) = (5-\lambda)(\lambda^2+2\lambda+1) = (\lambda+1)^2(5-\lambda)\,.\end{aligned}$$

Die Matrix hat also die beiden Eigenwerte $\lambda = -1$ und $\lambda = 5$.

Der Eigenwert fünf hat algebraische und damit auch geometrische Vielfachheit eins; die algebraische Vielfachheit von -1 ist zwei. Zur Berechnung der geometrischen Vielfachheit müssen wir den Eigenraum berechnen:

$$(A+E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(x+y) \\ -3(x+y) \\ 6z \end{pmatrix}$$

ist genau dann der Nullvektor, wenn $x = -y$ und $z = 0$ ist; der Eigenraum wird also aufgespannt vom Vektor

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die geometrische Vielfachheit ist somit nur eins.

b) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren und ggf. Hauptvektoren von A!

Lösung: Wir kennen bereits den Eigenvektor $\vec{v}_1$ zum Eigenwert -1, und natürlich sieht man mit bloßem Auge, daß

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

den Eigenraum zum Eigenwert fünf aufspannt. Was noch fehlt, ist ein von $\vec{v}_1$ linear unabhängiger Hauptvektor zu -1.

Der Hauptraum wird annuliert von

$$(A+E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}\,,$$

besteht also aus *allen* Vektoren, deren dritte Komponente verschwindet. Als von $\vec{v}_1$ linear unabhängigen zweiten Basisvektor des Hauptraums können wir zum Beispiel

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nehmen.

c) Berechnen Sie die Matrix e^{At} !

Lösung: Wir müssen zunächst die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung $\vec{v} \mapsto A\vec{v}$ bezüglich der Basis $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ bestimmen. Da in den Spalten dieser Matrix die Bilder der Basisvektoren stehen, brauchen wir also die Vektoren $A\vec{v}_i$, was im Falle der beiden Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_3$ kein Problem ist: Die werden einfach mit dem zugehörigen Eigenwert multipliziert. Für $\vec{v}_2$ ist

$$A\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \,.$$

Somit ist die neue Abbildungsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

wobei die Diagonalmatrix D und die hintere Matrix N offensichtlich kommutieren. Also ist

$$e^{Mt} = e^{Dt}e^{Nt} = e^{Dt}(E + Nt) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 3te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{pmatrix} .$$

Dies muß nun noch zurücktransformiert werden auf die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$; die Matrix des Basiswechsels von der Standardbasis zur neuen Basis enthält die Vektoren $\vec{v}_i$ als Spalten, ist also

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Inverse dazu sieht man entweder sofort wegen der Formel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a+b & 1 \end{pmatrix} ,$$

oder man berechnet sie nach GAUSS oder indem man die Vektoren der Standardbasis in der neuen Basis hinschreibt. Der einzige Vektor, der nicht in beiden Basen vorkommt, ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \,; \quad \text{somit ist} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Ausmultiplizieren führt auf

$$e^{At} = Be^{Mt}B^{-1} = \begin{pmatrix} (3t+1)e^{-t} & 3te^{-t} & 0 \\ -3te^{-t} & (1-3t)e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{pmatrix} .$$

d) Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 2x(t) + 3y(t) & \text{mit} \quad x(0) &= -1 \\ \dot{y}(t) &= -3x(t) - 4y(t) & \text{mit} \quad y(0) &= 1\ ! \\ \dot{z}(t) &= 5z(t) & \text{mit} \quad z(0) &= 0 \end{aligned}$$

Lösung: Dies ist ein System homogener linearer Differentialgleichungen mit Matrix A; die gesuchte Lösung ist also

$$e^{At}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h. $x(t) = -e^{-t}$, $\quad y(t) = e^{-t}$ $\quad$ und $\quad z(t) = 0$.

e) Ist deren Langzeitverhalten stabil gegenüber Störungen der Anfangsbedingungen?

Lösung: Nein, denn A hat auch den Eigenwert fünf. Macht man den Anfangswert für $z(t)$ auch nur leicht von null verschieden, kommen Terme mit e^{5t} ins Spiel, die Lösungsfunktionen gehen also betragsmäßig gegen unendlich statt gegen null.

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

a) Beschreiben Sie die Menge $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1\right\}$ geometrisch!

Lösung: Das ist natürlich eine (Voll-)Ellipse mit Halbachsen eins und zwei.

b) Bestimmen Sie die Maxima und Minima der Funktion $f(x, y) = x - 2x^2 - 3y^2$ auf M!

Lösung: $\nabla f = \begin{pmatrix} 1 - 4x \\ -6y \end{pmatrix}$ verschwindet nur im Punkt $x = -\frac{1}{4}$ und $y = 0$. Dort (wie auch überall sonst) ist die HESSE-Matrix

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

negativ definit; f hat im Punkt $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ also ein relatives Maximum; der Funktionswert ist dort

$$\frac{1}{4} - \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

Für Extrema auf dem Rand müssen ∇f und ∇g für $g(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ linear abhängig sein. Da $\nabla g = \binom{2x}{y/2}$ nur im Nullpunkt verschwindet, der nicht auf dem Rand liegt, gibt es für jedes Extremum auf dem Rand ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$1 - 4x = 2\lambda x \quad \text{und} \quad -6y = \lambda\frac{y}{2} \;\text{ oder }\; \frac{y}{2}(\lambda - 12) = 0.$$

Für $\lambda = 12$ wird die erste Gleichung zu $1 - 4x = 24x$ oder $x = 1/20$. Aufgrund der Ellipsengleichung muß dann $y = \pm 2\sqrt{1 - (1/20)^2} = \pm\sqrt{399}/10$ sein. Für $y = 0$ ist natürlich $x = \pm 1$.

Auf dem Ellipsenbogen nimmt f als stetige Funktion sowohl sein Maximum als auch sein Minumum annehmen; wegen

$$f(1, 0) = 1 - 2 = -1, \quad f(-1, 0) = -1 - 2 = -3 \quad \text{und} \quad f\left(\frac{1}{20}, \pm\frac{\sqrt{399}}{10}\right) = -\frac{481}{40} = -12\frac{1}{40}$$

wird in den beiden Punkten mit $x = -1/20$ das Minimum auf dem Rand angenommen und damit auch auf ganz M angenommen. Bei $(\pm 1, 0)$ liegen relative Maxima für die auf den Rand eingeschränkte Funktion; da das Maximum im Innern größer ist, wird das absolute Maximum bei $(-\frac{1}{4}, 0)$ angenommen mit Funktionswert $1/8$.