WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

2. April 2001

Modulklausur Höhere Mathematik I

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die FOURIER-Reihe von $f(t) = \sin^2 t$ enthält keine Cosinusterme.

2) Richtig oder falsch: Die FOURIER-Transformation definiert eine lineare Abbildung des SCHWARZ-Raums $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ auf sich selbst.

3) Richtig oder falsch: Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = \frac{5}{3}y(t)^{\frac{2}{5}}$ mit $y(0) = 0$ ist eindeutig lösbar.

4) Richtig oder falsch: Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix}1 & i\\ i & 1\end{smallmatrix}\right)$ ist HERMITEsch.

5) Richtig oder falsch: Die Zahlen $(i, \frac{1}{i})$ für $1 \le i \le 100$ sind positiv korreliert.

Aufgabe 1: (*6 Punkte)*

Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode zwei, und für $t \in [-1, 1]$ sei $f(t) = e^{|t|}$.

a) Skizzieren Sie f über dem Intervall $[-3, 3]$! Ist f gerade, ungerade oder keines von beiden?

b) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f !

c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert die FOURIER-Reihe gegen $f(t)$?

d) An welchen Punkten tritt das GIBBS-Phänomen auf?

Aufgabe 2: (*4 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Die LAPLACE-Transformierte von $\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ ist $s/(s^2 - 1)$.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y^{(3)}(t) + \dot{y}(t) = \cosh t$ mit $y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0$! Sie können bei *b),* nicht aber bei *a),* voraussetzen, daß $\mathcal{L}\{\sinh t - \sin t\}(s) = 2/(s^4 - 1)$ und $\mathcal{L}\{\cosh t - \cos t\}(s) = 2s/(s^4 - 1)$ ist.

Aufgabe 3: (*6 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0\\ -3 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$ und bestimmen Sie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

b) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren und ggf. Hauptvektoren von A !

c) Berechnen Sie die Matrix e^{At} !

d) Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 2x(t) + 3y(t) &&\text{mit}\quad x(0) = -1\\ \dot{y}(t) &= -3x(t) - 4y(t) &&\text{mit}\quad y(0) = 1 \;!\\ \dot{z}(t) &= 5z(t) &&\text{mit}\quad z(0) = 0 \end{aligned}$$

e) Ist deren Langzeitverhalten stabil gegenüber Störungen der Anfangsbedingungen?

Aufgabe 4: (*4 Punkte)*

a) Beschreiben Sie die Menge $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1\right\}$ geometrisch!

b) Bestimmen Sie die Maxima und Minima der Funktion $f(x, y) = x - 2x^2 - 3y^2$ auf M !

Steht Ihr Name auf jedem Blatt?