Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

2. April 2001

Modulklausur Höhere Mathematik I

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die **un**stetigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bilden einen Vektorraum.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise ist die Nullfunktion nicht unstetig.

2) Richtig oder falsch: Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei $A^2 = A$. Dann ist A entweder die Einheitsmatrix oder die Nullmatrix.

Lösung: *Falsch;* auch $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und mehrere andere Matrizen erfüllen die Gleichung $A^2 = A$.

3) Richtig oder falsch: Durch die Vorschrift $(z, w) \mapsto \mathfrak{Re}(z\overline{w})$ wird $\mathbb{C}$ zu einem zweidimensionalen Euklidischen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Lösung: *Richtig;* mit $z = x + iy$ und $w = u + iv$ ist $z\overline{w} = xu + yv + i(yu - xv)$; der Realteil $xu + yv$ ist also gerade das Euklidische Standardskalarprodukt der Vektoren $\binom{x}{y}$ und $\binom{u}{v}$ in $\mathbb{R}^2$.

4) Richtig oder falsch: Für das Vektorfeld $\vec{V}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ verschwinde $\operatorname{rot}\vec{V}$ überall. Dann ist $\int_\gamma \vec{V}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = 0$ für jede geschlossene Kurve γ.

Lösung: *Richtig;* da $\vec{V}$ auf ganz $\mathbb{R}^3$ und damit auf einer einfach zusammenhängenden Menge definiert ist.

5) Was ist $\iint_{\mathcal{K}} x^2y^2\, dx\, dy$ für $\mathcal{K} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| 0 \le x \le 1 \land 0 \le y \le 2\big\}$?

Lösung: $\mathcal{K}$ ist ist Normalbereich sowohl vom Typ I als auch vom Typ II; das Integral läßt sich also leicht auf zwei eindimensionale Integrationen zurückführen:

$$\iint_{\mathcal{K}} x^2y^2\, dx\, dy = \int_0^2 \left(\int_0^1 x^2\, dx\right) y^2\, dy = \int_0^2 \frac{y^2}{3}\, dy = \frac{8}{9}$$

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*
Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ -x + ay - z &= 1 \\ ax - y + 2az &= a^2 - 1 \end{aligned}$$

Lösung: Addition der ersten Gleichung zur zweiten und a-fache Subtraktion der ersten Gleichung von der dritten führt auf die Gleichungen

$$(a+1)y = (a+1) \quad \text{und} \quad -(1+a)y + az = -1\,.$$

Für $a \neq -1$ folgt aus der ersten dieser Gleichungen, daß $y = 1$ ist, und damit wird die zweite zu

$$-(1+a) + az = -1 \quad \text{oder} \quad az = a\,.$$

Im Falle $a \neq 0$ folgt daraus, daß auch $z = 1$ ist und damit (nach der ersten Gleichung des ursprünglichen Systems) $x = a - 2$; für $a = 0$ gibt es keine Bedingung an z, so daß $z = \lambda$ beliebig gewählt werden kann und

$$x = a - 1 - \lambda = -(1+\lambda)$$

ist.
Bleibt noch der Fall $a = -1$; hier gibt es keine Bedingung an y, so daß $y = \mu$ beliebig gewählt werdn kann.
Die Gleichung

$$-(1+a)y + az = -1$$

wird für $a = -1$ zu $-z = -1$, d.h. auch hier ist $z = 1$, und die erste Gleichung des Systems zeigt, daß

$$x = a - y - z = -1 - \mu - 1 = -(2+\mu)$$

sein muß. Also ist

$$\mathcal{L}_a = \begin{cases} \{(a-2,1,1)\} & \text{für } a \neq 0, -1 \\ \{(-(1+\lambda),1,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} & \text{für } a = 0 \\ \{(-(2+\mu),\mu,1) \mid \mu \in \mathbb{R}\} & \text{für } a = -1 \end{cases}$$

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*
Der $\mathbb{R}$-Vektorraum V sei erzeugt von den Funktionen $\sin t, \cos t, \sin^2 t, \cos^2 t, 1$ und t.

a) Bestimmen Sie eine Basis von V!

Lösung: Wegen $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ ist mindestens eine der drei an dieser Gleichung beteiligten Funktionen überflüssig, z.B. $\cos^2 t$. Die Menge

$$\mathcal{B} = \{\sin t, \cos t, \sin^2 t, 1, t\}$$

erzeugt also bereits den gesamten Vektorraum.
Falls es eine Relation der Form

$$\alpha \sin t + \beta \cos t + \gamma \sin^2 t + \delta + \varepsilon t = 0$$

gibt, muß zunächst $\varepsilon = 0$ sein, denn sonst geht die linke Seite für $t \to \infty$ betragsmäßig gegen unendlich. Einsetzen von $t = 0$ ergibt die Beziehung

$$\beta + \delta = 0 \quad \text{oder} \quad \delta = -\beta\,;$$

$t = \pi$ führt auf

$$-\beta + \delta = 0 \quad \text{oder} \quad \delta = \beta\,.$$

Also ist $\beta = \delta = 0$.
Für $t = \pm\pi/2$ ergeben sich die beiden Gleichungen $\pm\alpha + \gamma = 0$, also ist auch $\alpha = \gamma = 0$.
Damit haben wir gezeigt, daß $\mathcal{B}$ linear abhängig und somit eine Basis ist.

b) Zeigen Sie: Die Vorschrift $f \mapsto f'' + f$ definiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$.

Lösung: Die Linearität ist klar, da sowhl das Ableiten als auch die Identität linear sind und eine Linearkombination zweier linearer Abbildungen wieder linear ist. Zu zeigen ist nur, daß $f'' + f$ für jedes $f \in V$ wieder in V liegt, und dazu reicht es natürlich, die $f \in \mathcal{B}$ zu betrachten.
Für $f(t) = \sin t$ und $f(t) = \cos t$ ist $f'' + f$ die Nullfunktion; für $f(t) = \sin^2 t$ ist

$$f'(t) = 2 \sin t \cos t \,,$$

was nicht in V liegt, aber

$$f''(t) = -2\sin^2 t + 2\cos^2 t = 2 - 4\sin^2 t \quad \text{und} \quad f''(t) + f(t) = 2 - 3\sin^2 t$$

liegen in V.
Für $f(t) = 1$ und $f(t) = t$ schließlich verschwindet die zweite Ableitung, d.h. $f'' + f = f$ liegt in V.

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser linearen Abbildung bezüglich der in *a)* gefundenen Basis!

Lösung: In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Koeffizienten der Bilder der Basisvektoren, also ist die Abbildungsmatrix nach obiger Rechnung gleich

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Bestimmen Sie die Dimensionen von Kern und Bild dieser linearen Abbildung!

Lösung: Da $\sin t$ und $\cos t$ im Kern liegen, ist dieser mindestens zweidimensional; das Bild ist daher nach der Dimensionsformel höchstens dreidimensional. Da wir wissen, daß es die drei linear unabhängigen Funktionen $1, t$ und $\sin^2 t$ enthält, ist es genau dreidimensional, also ist auch der Kern genau zweidimensional.
(Alternativ kann man auch den Rang der Abbildungsmatrix betrachten, der natürlich drei ist; also ist die Dimension des Bildes gleich drei und die des Kerns nach der Dimensionsformel gleich zwei.)

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $f(x,y) = xy - x\sin y \cdot \cos y - 3x - 5$!

Lösung:

$$\begin{aligned} \nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y - \sin y \cos y - 3 \\ x + x\sin^2 y - x\cos^2 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - \sin y \cos y - 3 \\ x(1 + \sin^2 y - \cos^2 y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y - \sin y \cos y - 3 \\ 2x\sin^2 y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in denen die Gleichung $f(x,y) = 0$ nicht eindeutig nach y aufgelöst werden kann!

Lösung: Das sind die Punkte, in denen

$$f_y(x,y) = 2x\sin^2 y$$

verschwindet. Das sind einerseits die Punkte mit $x = 0$, andererseits die mit $\sin^2 y = 0$ oder $y = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Für $x = 0$ ist $f(0, y) = -5$; es gibt also keine solchen Punkte, für die f verschwindet.

Für Punkte mit $y = k\pi$ ist

$$f(x, y) = xy - 3x - 5 = x(y - 3) - 5 = 0 \iff x = \frac{5}{y-3} = \frac{5}{k\pi - 3}\,;$$

die Gleichung ist also überall eindeutig nach y auflösbar außer in den Punkten der Form

$$\left(k\pi,\ \frac{5}{k\pi - 3}\right) \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

c) Berechnen Sie für alle Punkte (x_0, y_0), in deren Umgebung $f(x, y) = 0$ eindeutig nach y aufgelöst werden kann, die Ableitung der Funktion $\varphi(x)$, für die dort $f\big(x, \varphi(x)\big) = 0$ ist.

Lösung:

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = \frac{\sin y \cos y + 3 - y}{2x \sin^2 y}\,.$$

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $\gamma\colon [0, 10] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = (\sqrt{2}t^2, \frac{1}{3}t^3, 4t)$!

Lösung: Die Bogenlänge ist

$$\int_0^{10} |\dot\gamma(t)|\ dt\,.$$

Hier ist

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}\,t \\ t^2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

also

$$|\dot\gamma(t)| = \sqrt{(2\sqrt{2}\,t)^2 + t^4 + 4^2} = \sqrt{t^4 + 8t^2 + 16} = t^2 + 4\,.$$

Somit ist

$$\int_0^{10} |\dot\gamma(t)|\ dt = \int_0^{10} (t^2 + 4)\ dt = \frac{t^3}{3} + 4t\Big|_0^{10} = \frac{1000}{3} + 40 = 373\frac{1}{3}$$

die Bogenlänge der Kurve.