Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

2. April 2001

Modulklausur Höhere Mathematik I

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Die **un**stetigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bilden einen Vektorraum.

2) *Richtig oder falsch:* Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei $A^2 = A$. Dann ist A entweder die Einheitsmatrix oder die Nullmatrix.

3) *Richtig oder falsch:* Durch die Vorschrift $(z, w) \mapsto \mathfrak{Re}\big(z\overline{w}\big)$ wird $\mathbb{C}$ zu einem zweidimensionalen Euklidischen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

4) *Richtig oder falsch:* Für das Vektorfeld $\vec{V}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ verschwinde $\operatorname{rot}\vec{V}$ überall. Dann ist $\int\limits_\gamma \vec{V}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = 0$ für jede geschlossene Kurve γ.

5) Was ist $\iint_{\mathcal{K}} x^2y^2\,dx\,dy$ für $\mathcal{K} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| 0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le 2\big\}$?

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ -x + ay - z &= 1 \\ ax - y + 2az &= a^2 - 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*
Der $\mathbb{R}$-Vektorraum V sei erzeugt von den Funktionen $\sin t, \cos t, \sin^2 t, \cos^2 t, 1$ und t.

a) Bestimmen Sie eine Basis von V!

b) Zeigen Sie: Die Vorschrift $f \mapsto f'' + f$ definiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$.

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser linearen Abbildung bezüglich der in *a)* gefundenen Basis!

d) Bestimmen Sie die Dimensionen von Kern und Bild dieser linearen Abbildung!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $f(x, y) = xy - x \sin y \cdot \cos y - 3x - 5$!

b) Bestimmen Sie alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, in denen die Gleichung $f(x, y) = 0$ nicht eindeutig nach y aufgelöst werden kann!

c) Berechnen Sie für alle Punkte (x_0, y_0), in deren Umgebung $f(x, y) = 0$ eindeutig nach y aufgelöst werden kann, die Ableitung der Funktion $\varphi(x)$, für die dort $f\big(x, \varphi(x)\big) = 0$ ist.

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*
Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $\gamma\colon [0, 10] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = (\sqrt{2}t^2, \frac{1}{3}t^3, 4t)$!

Steht Ihr Name auf jedem Blatt?