Übungsaufgaben zur Kodierungstheorie

1. *(2 Punkte)* (Alternative Methode zur Beschreibung von Reed-Solomon Codes)

   Sei $\alpha := [x] \in \mathbb{F}_8 - \{0\}$ mit $\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x + 1)$. Wegen $\alpha \neq 1$ ist α ein Erzeugendes der zyklischen Gruppe $(\mathbb{F}_8 - \{0\}, \cdot)$.

   Sei $C \subset \mathbb{F}_8^7$ der Reed-Solomon Code im engeren Sinn (also $b = 1$) der Länge $n = 7$, mit dem Erzeugenden α und mit dem designierten Abstand $\delta = n - l = 5$.

   In Satz 10.4 ist eine alternative Methode zur Beschreibung von Reed-Solomon Codes im engeren Sinn gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe dieses Satzes eine Basis von C.

2. *(3 Punkte)* (Berechnung von oberen und unteren Schranken)
   In Aufgabe 3 von Blatt 8 waren BCH-Codes C_1 und C_2 im engeren Sinn der Länge $n = 80$ über $\mathbb{F}_3$ mit designierten Abständen $\delta_1 = 4$ und $\delta_2 = 7$ und geeignetem $\alpha \in \mathbb{F}_{3^4} - \{0\}$ studiert worden. Nehmen Sie in beiden Fällen $d(C_i) = \delta_i$ an (ohne zu versuchen, es zu beweisen).

   Schätzen Sie mit Hilfe der Singleton-Schranke (Satz 9.1 und Satz 11.7), der Hamming-Schranke (Satz 11.8) und der Gilbert-Varshamov-Schranke (Satz 11.5) die Qualität dieser BCH-Codes ab.

   Vorsicht: Bitte verwechseln Sie das δ in Kapitel 11 (ein *relativer* Hamming-Abstand $\in (0, 1]$) nicht mit dem δ bei BCH-Codes (ein *designierter* Abstand).

3. *(3 Punkte)* Zeigen Sie
   $$A_2(n, 2l - 1) = A_2(n + 1, 2l).$$

   Hinweise: Die Idee der Ungleichung $\leq$ steckt im Beweis von Lemma 2.11. Die andere Richtung läuft ähnlich ab. Beachten Sie, dass die Codes hier nicht unbedingt linear sind.

4. *(4 Punkte)* (Berechnung von oberen und unteren Schranken)

   (a) Berechnen Sie die (Singleton, Plotkin, Hamming, Gilbert-Varshamov)-Schranken für $A_2(17, 8)$. Hinweise: Es ist $V_2(17, 7) = 41226$ und $V_2(17, 3) = 834$. Beachten Sie, dass bei der Hamming-Schranke d ungerade sein muss. Führen Sie eine einfache Abschätzung durch, um sie dennoch nutzen zu können.

   (b) Was geschieht mit den (Singleton, Plotkin, Hamming, Gilbert-Varshamov)-Schranken für den Fall beliebig langer Codes und annähernd gleich bleibender Fehlerkorrekturleistung? Berechnen Sie dazu für die aufgeführten Schranken jeweils $\alpha_2(\delta)$ mit $\delta = 8/17$.

Bitte wenden!

5. *(2+1+1 Punkte)* (Die Griesmer-Schranke)
Die Singleton-Schranke (Satz 9.1 und Satz 11.7) gibt für lineare Codes: $n \geq d+k-1$. Die Griesmer-Schranke gibt eine schärfere Abschätzung im Fall von binären Codes.

$N(k,d)$ ist definiert als *die Länge der kürzesten, binären, linearen Codes mit Dimension k und Hamming-Abstand d.*

(a) Es ist

$$N(k,d) \geq d + N(k-1, \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil)$$

und (Griesmer-Schranke)

$$N(k,d) \geq \sum_{i=0}^{k-1} \left\lceil \frac{d}{2^i} \right\rceil .$$

(Hinweis: Mit $\lceil x \rceil$ wird die kleinste ganze Zahl $\geq x$ bezeichnet, Beispiel: $\lceil \frac{7}{2} \rceil = 4$)
Folgern Sie die zweite aus der ersten Aussage. Die erste brauchen Sie nicht zu beweisen.
Warum ist die Griesmer-Schranke besser als die Singleton-Schranke $N(k,d) \geq k+d-1$?

(b) Berechnen Sie damit eine untere Schranke für die Länge des kürzesten, 3-fehlerkorrigierenden, linearen Codes der Dimension 5 über $\mathbb{F}_2$.

(c) Berechnen Sie eine untere Schranke für $N(k, 2^{k-1})$.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, Skript etc.) sind unter
`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/cod10.html` zu finden.

Abgabe bis Donnerstag, 27. Mai 2010, 17 Uhr (Kasten im Eingangsbereich A5 oder Beginn der Übung)