Übungsaufgaben zur Kodierungstheorie

1. *(4 Punkte)* (Voraussetzung: Lösung der Aufgaben 1 und 2 von Blatt 7) Alle zyklischen Codes der Länge 7 über $\mathbb{F}_2$ lassen sich als BCH-Codes mit gewissen Werten $\alpha \in \mathbb{F}_{2^3}$ und b und δ deuten. Aber Vorsicht, es kann zu einem Code verschiedene α's und – abhängig von α – verschiedene Werte b und δ geben.

   Geben Sie zu jedem dieser Codes ein Tripel (α, b, δ) an, so dass δ maximal ist.

2. *(3+1 Punkte)* (Voraussetzung: Lösung der Aufgaben 1 und 2 von Blatt 7) Aus Aufgabe 2 von Blatt 7 kennen Sie den zyklischen Code $C \subset \mathbb{F}_2^3$ mit Erzeugerpolynom $g(t) = (t+1)(t^3+t+1)$.

   (a) Berechnen Sie mit Hilfe von Satz 7.5 (b) (und mit Hilfe von Aufgabe 1 von Blatt 7) eine Kontrollmatrix von C.

   (b) Vergleichen Sie diese Kontrollmatrix mit der aus Aufgabe 2 von Blatt 7 (also der aus Satz 7.4 (c)). Zeigen Sie explizit, dass sie den gleichen Code liefern.

3. *(4 Punkte)* Was sind die Erzeugerpolynome und die Dimensionen der BCH-Codes im engeren Sinn der Länge $n = 80$ über $\mathbb{F}_3$ mit designiertem Abstand $\delta = 4$ und $\delta = 7$? Wie hoch sind die Informationsraten $R = k/n$? Sie müssen die Erzeugerpolynome nicht als Polynome in $\mathbb{F}_3[t]$ hinschreiben, ein Produkt gewisser $m_i(t)$ von unten reicht.

   Hinweis: Sei α ein erzeugendes Element von $\mathbb{F}_{3^4}$. Es bezeichne $m_i(t)$ das Minimalpolynom von α^i in $\mathbb{F}_3[t]$. Dann sind

$$\begin{aligned} m_1(t) = m_3(t) &= (t-\alpha)(t-\alpha^3)(t-\alpha^9)(t-\alpha^{27}), \\ m_2(t) = m_6(t) &= (t-\alpha^2)(t-\alpha^6)(t-\alpha^{18})(t-\alpha^{54}), \\ m_4(t) &= (t-\alpha^4)(t-\alpha^{12})(t-\alpha^{28})(t-\alpha^{36}), \\ m_5(t) &= (t-\alpha^5)(t-\alpha^{15})(t-\alpha^{45})(t-\alpha^{55}). \end{aligned}$$

4. *(4 Punkte)* (Vandermonde-Matrix) Beweisen Sie die folgende Formel.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

   Hinweise zu einem möglichen Lösungsweg: Man kann zuerst die erste Zeile von allen anderen Zeilen abziehen. Dann kann man nach Laplace die erste Zeile und die erste Spalte weglassen. Nun kann man wegen der Multilinearität der Determinante Faktoren $(x_j - x_1)$ aus den entsprechenden Zeilen herausziehen. Nun Induktion.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, Skript etc.) sind unter `http://hilbert.math.uni-mannheim.de/cod10.html` zu finden.

Abgabe bis Donnerstag, 6. Mai 2010, 17 Uhr (Kasten im Eingangsbereich A5 oder Beginn der Übung)