Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling, Jan Morgenthaler

Blatt 5
17.03.2010

Übungsaufgaben zur Kodierungstheorie

1. *(2 Punkte)* Stellen Sie die 8×8-Matrix $H_8^{(st)}$ und die Nebenklasse $\eta + \mathcal{C}(H_8^{(st)})$ graphisch für $\eta = (11110000)$ dar, mit schwarzen und weissen Kästchen, die Nebenklasse als 16×8-Matrix. Wie hoch ist die Informationsrate? Was für ein Code ist es? (Angabe sowohl in der (n,M,d) als auch [n,k,d]-Notation)

2. *(2+2+2 Punkte)* Kodieren und Dekodieren des Hadamard-Codes $\mathcal{C}(H_8^{(st)})$.

   (a) Schreiben Sie die Matrix G_3^{erz} von Korollar 4.13 (b) hin. Kodieren Sie damit das Wort (1011).

   (b) Berechnen Sie das Produkt $H_8^{(st)} \cdot (1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ -1)^{tr}$ und dekodieren Sie mit Hilfe des Ergebnisses und Lemma 4.14 das empfangene Wort (00110001).

   (c) Schreiben Sie die Matrizen $M_8^{(1)}, M_8^{(2)}$ und $M_8^{(3)}$ hin und berechnen Sie die Produkte

$$\begin{aligned} M_8^{(3)} \cdot (1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ -1)^{tr}, \\ M_8^{(2)} \cdot M_8^{(3))} \cdot (1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ -1)^{tr}, \\ M_8^{(1)} \cdot M_8^{(2)} \cdot M_8^{(3))} \cdot (1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ -1)^{tr}. \end{aligned}$$

3. *(3 Punkte)* Notieren Sie zu den Elementen $1, z_1, z_2, z_3, z_1z_2, z_1 + z_2z_3, z_1z_2z_3 \in Abb(\mathbb{F}_2^3, \mathbb{F}_2)$ das jeweils zugehörige Element aus $\mathbb{F}_2^8$.

4. *(5 Punkte)* Die folgende Aufgabe soll den ersten Beweis für $d(\mathcal{R}(r,m)) \geq 2^{m-r}$ illustrieren (vgl. Vorlesung Bemerkungen 5.6 (iv)–(vii)).
   Seien $m = 4$, $M = \{1,2,3,4\}$, $J = \{1,2\}$, $J^C = M - J = \{3,4\}$, $P_{J,(1,1,1,1)} = z_1z_2$ sowie $f := z_1z_2 + z_2z_3 + z_1$ eine "Störung" von z_1z_2. Die Träger von

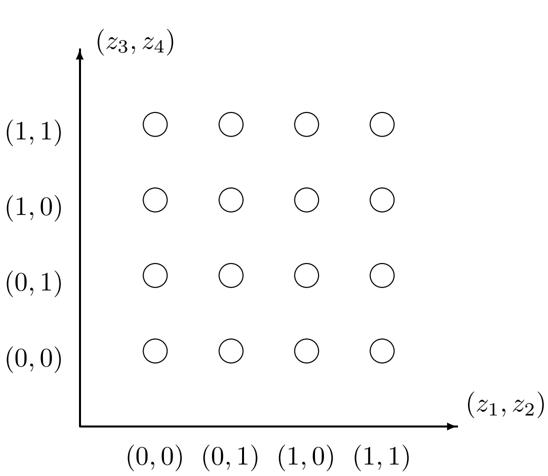
   (i) z_1z_2,

   (ii) z_2z_3,

   (iii) z_1,

   (iv) f

   sollen graphisch dargestellt werden. Verwenden Sie dazu jeweils ein Schaubild wie folgt:



Markieren Sie die Träger, indem Sie die entsprechenden Kreise schwarz ausmalen. (Es reichen jeweils Kopien der 16 Kreise. Die Koordinatenachsen und die Werte an den Achsen müssen Sie nicht jedesmal kopieren.)

Machen Sie sich klar, daß die Spalte ganz links für S_J steht und die Zeile ganz unten für S_{J^C}. Geben Sie die 4 Zahlen $|\mathrm{Supp}(f) \cap (S_{J^C} + t)|$ für $t \in S_J$ an. Welche Eigenschaft dieser 4 Zahlen ist entscheidend für den Beweis in Bemerkung 5.6 (vii) der Vorlesung, daß $|\mathrm{Supp}(f)| \geq 2^{m-r}$ ist?

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, Skript etc.) sind unter `http://hilbert.math.uni-mannheim.de/cod10.html` zu finden.

Abgabe bis Donnerstag, 25. März 2010, 17 Uhr (Kasten im Eingangsbereich A5 oder Beginn der Übung).

Am 24. März wird es kein Übungsblatt geben, da am 15. April Vorlesung und Übung wegen des Dies Academicus ausfallen. Die Vorlesung am 14. April findet statt. Dort wird auch das 6. Übungsblatt ausgeteilt werden.