Übungsaufgaben zur Kodierungstheorie

1. *(3+2 Punkte)*

   (a) Konstruieren Sie für die folgenden Werte von q, r einen Hamming-Code. Geben Sie hierzu jeweils eine Kontrollmatrix, eine Erzeugermatrix, die Informationsrate sowie die Daten $[n, k, d]$ an:

   i. $(q, r) = (2, 4)$
   ii. $(q, r) = (3, 2)$
   iii. $(q, r) = (3, 3)$

   (b) Betrachten Sie wieder die in der vorigen Teilaufgabe gegebenen Codes. Schätzen Sie die Anzahl der äquivalenten Hamming-Codes zu (i), (ii) und (iii) nach oben ab! Schätzen Sie die Anzahl der Äquivalenzklassen von Hamming-Codes zu (i), (ii) und (iii) nach oben ab!
   Hinweis: Hier ist nur abschätzen und nicht bestimmen verlangt, weil die Formeln, auf die Sie stoßen sollen, aufgrund von möglichen Symmetrien von Codes nur eine Abschätzung geben.

2. *(3 Punkte)* Konstruieren Sie einen [8,4,4]-Code über $\mathbb{F}_2$. Geben Sie hierzu eine Erzeugermatrix und eine Kontrollmatrix an.
   Hinweise: Lemma 2.9 und das Beispiel innerhalb von Beispiel 2.4.

3. *(4+1 Punkte)* Sei $\mathcal{C}$ der Code über $\mathbb{F}_2$ mit der Kontrollmatrix

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Wählen Sie zu jedem der 8 Syndrome in $M(3 \times 1, \mathbb{F}_2)$ einen Nebenklassenführer.

   (b) Dekodieren Sie das empfangene Wort (111111) mit diesen Nebenklassenführern und der Syndrom-Dekodierung.

4. *(3 Punkte)* Sei $\mathcal{C} \neq \{0\}$ ein $[n, k]$-Code über $\mathbb{F}_q$ mit Kontrollmatrix H. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\begin{aligned} d(\mathcal{C}) &= min(r \in \mathbb{N} \,|\, \text{es gibt r linear abhängige Spalten in } H) \\ &= max(r \in \mathbb{N} \,|\, \text{je r - 1 Spalten in } H \text{ sind linear unabhängig}) \end{aligned}$$

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, Skript etc.) sind unter `http://hilbert.math.uni-mannheim.de/cod10.html` zu finden.

Abgabe bis Donnerstag, den 11. März 2010, 17 Uhr (Kasten im Eingangsbereich A5 oder Beginn der Übung)