AG Mannheim-Heidelberg SS 2005

Quantenkohomologie und Frobenius-Mannigfaltigkeiten

Das größere Teil der AG im SS 05 soll rund um die Kapitel 0–3 in [Lo] organisiert sein. Da geht es um die Gromov-Witten-Invarianten vom Geschlecht 0 einer *konvexen* projektiven Mannigfaltigkeit (Beispiele: homogene projektive Mfgen, z.B. $\mathbb{P}^n$). In diesem Fall haben die Modulräume stabiler Abbildungen alle gewünschten Eigenschaften, und die GW-Invarianten vom Geschlecht 0 haben eine glasklare enumerative Bedeutung ([FP] Lemma 14). Die erzeugende Funktion dieser GW-Invarianten ist das Herzstück eines formalen Keims einer Frobenius-Mannigfaltigkeit. Das impliziert viele Relationen zwischen den GW-Invarianten.

In [Lo] stehen präzise (und verständlich formulierte) Aussagen, aber fast keine Beweise. Auch für die Teilnehmer, die keinen Vortrag halten wollen, ist es nützlich und machbar, Kapitel 0–3 in [Lo] zu lesen.
Je nach Ehrgeiz können die Vortragenden [Lo] fast wörtlich folgen oder weitere Literatur zu Rate ziehen. (Es kann nicht Sinn der AG sein, alles aufzuarbeiten. Da würde man schon das halbe Semester mit den Räumen $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ verbringen können.)
In [Au], part 2 und 3, findet man eine andere "weiche" Einführung mit vielen Beispielen, die recht verschieden von [Lo] ist und [Lo] gut ergänzt.
[FP], Kapitel 0, 1, 7, 8, 9 (nur die ersten beiden Seiten von 9), gibt eine präzise Darstellung mit Beweisen zu Kapitel 0 und 3 in [Lo].
Der Artikel [KM] steht in der Literaturliste, weil er eine zentrale Rolle für die Entwicklung der algebraisch geometrischen Version der Quantenkohomologie spielte und weil er viel Motivation enthält.
Von dem Buch [Ma] passen am besten zur AG Teile von Kapitel I und II (für Frobenius-Mannigfaltigkeiten) und Kapitel III §§2-5 (für [Lo] §§0-3).
Das Buch [CK] enthält enorm viel Material zu Mirror Symmetrie und Quantenkohomologie und gibt schon beim Blättern einen gewissen Eindruck von beidem.

In der Vorschlagsliste (und bei den Literaturangaben) ist der Block von Vorträgen zu [Lo] durch einen Strich (——-) von Vortragsvorschlägen zu anderen Aspekten von Frobenius-Mannigfaltigkeiten getrennt. In dieser zweiten Gruppe ist jeder Vortrag von allen anderen und von denen aus dem ersten Block unabhängig. Welche von ihnen gehalten werden (oder ob überhaupt) und in welcher Reihenfolge, ist fast beliebig. Bei ihnen reichen Grundkenntnisse in Differentialgeometrie aus; algebraische Geometrie braucht man da nicht.

Literatur

[Lo] E.J.M. Looijenga: Introduction to Gromov-Witten theory. (Spring school Frobenius manifolds, May 2002, Enschede.) Handschriftliches Manuskript.
§0 pp 1+2. Motivation: problems from enumerative geometry
§1 pp 3-8. The moduli spaces $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$
§2 pp 9-12. Formal Frobenius manifolds.
§3 pp 13-22. Quantum cohomology.
§4 pp 23-25. Cohomological field theory in genus zero
§5 pp 26-29. Gromov-Witten invariants of a point
§6 pp 30-31. Gromov-Witten invariants
pp 32-33. Bibliography

[Au] M. Audin: An introduction to Frobenius manifolds, moduli spaces of stable maps and quantum cohomology. Manuskript (5.8.1998), 54 Seiten, auf der Homepage von Michèle Audin (Strasbourg).

[FP] W. Fulton, R. Pandharipande: Notes on stable maps and quantum cohomology. In: *Algebraic geometry - Santa Cruz 1995 (eds. Kollár, Lazarsfeld, Morrison)*, Proceedings of the 1995 Summer Research Institute in Algebraic Geometry. Proc. of Symp **62.2**, 45–96. Auch math.AG/9608011.

[KM] M. Kontsevich, Yu. Manin: Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry. Commun. Math. Phys. **164** (1994), 525–562. Auch hep-th/9402147.

[Ma] Yu. Manin: Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces. AMS Coll. Publ. **47**, 1999. 303 Seiten.

[CK] D. Cox, S. Katz: Mirror symmetry and algebraic geometry. Math. Surveys and Monographs **68**, AMS, 1999. 469 Seiten

---

[D1] B. Dubrovin: The geometry of 2D topological field theories. In: *Integrable systems and quantum groups.* Springer Lecture Notes in Math. 1620 (1996), 120–348.

[He] C. Hertling: Frobenius manifolds and moduli spaces for singularities. Cambridge Tracts in Mathematics **151**, Cambridge University Press 2002. 270 Seiten

[Sa] C. Sabbah: Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius. Savoirs actuels, EDP Sciences/CNRS Éditions, 2002. 289 Seiten.

[D2] B. Dubrovin: Differential geometry of the space of orbits of a Coxeter group. hep-th/9303152. 30 Seiten.

In der Liste auf den Seiten 3 und 4 mit Vorschlägen zu Vorträgen stehen mehr Vorträge, als ins SS 05 passen. Von der zweiten Gruppe muß gar keiner gehalten werden; beim ersten Block ist viel Flexibilität bezüglich der Länge der Vorträge.
Bitte geben Sie mir per email Ihre Wünsche zu Vorträgen durch, an

hertling@math.uni-mannheim.de.

Ich werde demnächst auf meiner Homepage

(http://www.hilbert.math.uni-mannheim/∼hertling/index.html)

Informationen zur AG und zu den Vorträgen angeben und dann auch hin und wieder aktualisieren.

Vortragsvorschläge

Links von dem Doppelpunkt steht jeweils ein Vorschlag für die Anzahl der Vorträge zum genannten Titel. Da, wo 1-2 oder 1-3 steht, können sich auch mehrere Vortragende absprechen und sich das Thema teilen. Oder ein einzelner kann je nach Ehrgeiz einmal oder mehrmals sprechen.

1-2, eher 2: *Die Modulräume* $\overline{M}_{0,n}$ *stabiler Kurven vom Geschlecht 0.*
[Lo] §1; falls 2 Vorträge, dann z.B. auch [Ma] III §3 oder [KM] Kap. 7 oder evtl. [Keel], [Kapranov] (zitiert in [Lo]).

1: *Formale Frobenius-Mannigfaltigkeiten.*
[Lo] §2; evtl. mehr zur Definition von Frobenius-Mannigfaltigkeiten in [Ma] oder [He] oder [Sa] oder [D1].

1-3: *Die Modulräume* $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(V,\beta)$ *stabiler Abbildungen vom Geschlecht 0.*
[Lo] §3, Seiten 13–14; falls mehr als 1 Vortrag gehalten wird (das wäre wünschenswert), kann man Material aus [Au] part 2 (§§8–12) ziehen, vor allem viele Beispiele.

0-1: *Konvexe/homogene Mannigfaltigkeiten.*
Inhalt: [FP] §7, die ersten zwei Seiten, vor allem Lemma 14 (mit Beweis) und Standardaussagen zu homogenen Mfgen (1. Absatz in [FP] §7) erläutern, und die Bedeutung von *konvex* diskutieren (evtl. auch die Nicht-Obstruiertheit von inf. Deformationen von Kurven in einer konvexen Mfg.: [Lo] Seite 13).
Hier wird viel klassische algebraische Geometrie gebraucht.

1: *Gromov-Witten–Invarianten vom Geschlecht 0.*
[Lo] Seiten 15–16; auch Material aus [Au] §13 (aber noch nicht das GW-Potential), evtl. auch [KM] 2.2 + 2.3.

1-2: *Vom Gromov-Witten–Potential zu einer formalen Frobenius-Mannigfaltigkeit.*
Inhalt: GW-Potential, Eigenschaften, der Beweis der Assoziativität. [Lo] §3 Seiten 17–20; vgl. auch [Au] §13 (Potential) und §14 (Vorsicht, Unsauberkeiten beim Potential).

1: *Anwendungen auf enumerative Probleme.*
[FP] §9, die ersten beiden Seiten; evtl. weitere Beispiele aus Referenzen, die dort zitiert sind.

0-1: *Quantenkohomologie von Hyperflächen im $\mathbb{P}^n$.*
Unter anderem [Lo] §3 Seiten 21–22 und [Au] §15; aber hier braucht man auch andere Referenzen und Erfahrung mit algebraischer Geometrie.

1: *Frobenius-Mannnigfaltigkeiten und meromorphe Zusammenhänge.*
[He] 9.1 + 9.3 oder [Ma] I §§1-2 oder [Sa] VII §§1-2.

1: *Frobenius-Mannigfaltigkeit zur A_k-Singularität.*
[Au] §3; evtl. auch Diskussion von Frobenius-Mannigfaltigkeiten bei beliebigen Singularitäten, aber nur die Multiplikation: [He] 5.1 oder Seite 101; oder [Ma] III §8.

1-2: *Komplexe Orbiträume endlicher Coxetergruppen.*
[D2] (Diffgeom. "in Koordinaten"), dort Konstruktion der Struktur einer Frobenius-Mannigfaltigkeit; aber zur Identifikation der Multiplikation mit dem Rezept vom 15.2.05, ausgehend von Eins-Feld und Diskriminante, braucht man einen zweiten Vortrag und [He] Part 1, vor allem 4.1.

1: *Mirror-Partner zur Quantenkohomologie des $\mathbb{P}^n$.*
Vortragender C. Hertling, falls der Vortrag stattfindet.

1: *Kohomologische Feldtheorien vom Geschlecht 0.*
[Lo] §4 oder/und [Ma] III §§1 + 4 (ohne Beweise).