AG Mannheim-Heidelberg   WS 2005/06

Harmonische Bündel

Harmonische Bündel sind komplexe Vektorbündel mit einer flachen Struktur und einer Higgs-Bündel-Struktur, zu denen es eine hermitesche Metrik gibt, die mit beiden Strukturen nichttriviale Kompatibilitätsbedingungen erfüllt (Details in den Hinweisen zum 1. und 2. Vortrag unten). Harmonische Bündel stellen ein Bindeglied zwischen flachen Bündeln und Higgs-Bündeln dar. Es gibt zwei Korrespondenzen im Fall, wenn die Basis eine kompakte Kählermannigfaltigkeit ist,

halbeinfache flache Vektorbündel	$\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$	harmonische Bündel	$\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$	polystabile Higgs-Bündel mit $c_1 = c_2 = 0$

Die linke ist von Corlette [Co, §4] (aufbauend auf [ES], [Do3], die rechte von Simpson [Si1, §§3–7] (aufbauend auf [NS], [Do1], [UY], [Do2], [Hi]).
Harmonische Bündel sind Verallgemeinerungen von Vektorbündeln mit einer Variation von Hodge-Strukturen. Simpson hat sie angewandt, um Aussagen über die Fundamentalgruppen von kompakten Kählermannigfaltigkeiten zu machen ([Si2] gibt einen ersten Eindruck).
Es gibt verschiedene Weiterentwicklungen ([JZ], [Li], [He], [Sab], [Mo1], [Mo2], [Mo3], [Mo4]).

In der AG werden diese Korrespondenzen behandelt. Hier ist eine Liste der

Vortragsvorschläge

1. Hermitesche Vektorbündel und Higgs-Bündel
2. Definition harmonischer Bündel und Formulierung des Hauptresultats
3. Harmonische und pluriharmonische Abbildungen im allgemeinen
4. Harmonische Bündel und (pluri)harmonische Abbildungen
5. Geschichte der Hermite-Einstein-Bündel

6.+7. Halbeinfache und harmonische Bündel nach Corlette

8.-10. Higgs-Bündel und harmonische Bündel nach Simpson

11. Anwendungen auf Fundamentalgruppen von Kählermannigfaltigkeiten

12.+13. Harmonische Bündel im nichtkompakten Fall

14. Polarisierbare Twistor-D-Moduln

Hinter der Literaturliste stehen ausführliche Vorschläge und Hinweise zu den ersten fünf Vorträgen. Die ersten fünf Vorträge sollen eine gute Idee von den Strukturen, den Ergebnissen, der Literatur und einem Teil der involvierten Geometrie geben. Die Vorträge 1 – 3 kann jeder halten. Bei 4 ist Erfahrung mit der Differentialgeometrie symmetrischer Räume gut, bei 5 (Bericht zur Literatur) ist allgemeine Erfahrung gut.
Die ersten fünf Vorträge sind die wichtigsten.

Die Vorträge 6+7 sollen eine Idee des Beweises von Corlette [Co, §4] geben, die Vorträge 8 – 10 eine Idee des Beweises von Simpson [Si1, §§3–7]. Ob es wirklich 2 bzw. 3 Vorträge werden oder weniger oder mehr, hängt von der Energie und der Detailfreude der Vortragenden ab.

Die Vorträge 11 – 14 sind nur Vorschläge. Keiner von ihnen muß realisiert werden. Es sind auch Vorträge über andere Anwendungen von harmonischen Bündeln oder über Querverbindungen zu anderen Gebieten denkbar.

Wer einen Vortrag halten möchte (bitte reißen Sie sich um die ersten fünf Vorträge), wendet sich bitte an R. Weissauer oder C. Hertling, am besten per email.

Für jeden empfehlenswert zu lesen sind
[Si2], vor allem die ersten 3 Seiten,
[Si3] die Seiten 13–19,
[Mo3] die Seiten 14–16,
[CMSP] Kapitel 14, vor allem die Seiten 359–368,
die Einleitungen von [Si1], [Si3], [Mo4].

Literatur

[Bi] O. Biquard: Fibrés de Higgs et connexions intégrables: le cas logarithmique (diviseur lisse). Ann. Sci. Ecole Norm. Sup **30** (1997), 41–96.

[CMSP] J. Carlson, S. Müller-Stach, Ch. Peters: Period mappings and period domains. Cambrigde studies in advanced mathematics **85**, Cambridge University Press, 2003.

[Co] K. Corlette: Flat G-bundles with canonical metrics. J. Diff. Geom. **28** (1991), 239–252.

[Do1] S.K. Donaldson: Anti self dual Yang–Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles. Proc. London Math. Soc. **50** (1985), 1–26.

[Do2] S.K. Donaldson: Infinite determinants, stable bundles, and curvature. Duke Math. J. **54** (1987), 231–247.

[Do3] S.K. Donaldson: Twisted harmonic maps and self-duality equations. Proc. Lond on Math. Soc. **55** (1987), 127–131.

[DK] S.K. Donaldson, P.B. Kronheimer: The geometry of four-manifolds. Oxford University Press, 1990.

[ES] J. Eells, J.H.Sampson: Harmonic mappings of Riemannian manifolds. Amer. J. Math. **86** (1964), 109–160.

[He] C. Hertling: tt^* geometry, Frobenius manifolds, their connections, and the construction for singularities. J. reine angew. Math. **555** (2003), 77–161.

[Hi] N.J. Hitchin: The self-duality equations on a Riemann surface. Proc. London Math. Soc. **55** (1987), 69–126.

[Hig] P.W. Higgs: Broken symmetries and the masses of gauge bosons. Phys. Rev. Lett. **13** no. 16 (1964), 508–509.

[JZ] J. Jost, K. Zuo: Harmonic maps of infinite energy and rigidity results for representations of fundamental groups of quasiprojective manifolds. J. Diff. Geom. **47** (1997), 469–503.

[Li] J. Li. Hermitian Einstein metrics and Chern number inequalities on parabolic stable bundles over Kähler manifolds. Comm. Anal. Geom. **8** (2000), 445–475.

[Lu] M Lübke: Chernklassen von Hermite-Einstein-Vektorbündeln, Math. Ann. **260** (1982), 133–141.

[Mo1] T. Mochizuki: Asymptotic behaviour of tame nilpotent harmonic bundles with trivial parabolic structure. J. Diff. Geom. **62**, 351–559.

[Mo2] T. Mochizuki: Asymptotic behaviour of tame harmonic bundles and an application to pure twistor D-modules. math.DG/0312230.

[Mo3] T. Mochizuki: A characterization of semisimple local system by tame pure imaginary pluri-harmonic metric. math.DG/0402122.

[Mo4] T. Mochizuki: Kobayashi-Hitchin correspondence for tame harmonic bundles and an application. math.DG/0411300.

[NS] M.S. Narasimhan, C.S. Seshadri: Stable and unitary bundles on a compact Riemann surface. Ann. of Math. **82** (1965), 540–564.

[Sab] C. Sabbah: Polarizable twistor D-modules. Astérisque **300** (2005) (208 pages) (and math.AG/0503038).

[Sa] J.H. Sampson: Applications of harmonic maps to Kähler geometry. Contemp. Math. **49** (1986), 125–133.

[Sch1] L. Schäfer: Harmonic bundles, topological-antitopological fusion and the related pluriharmonic maps. Prépublication de'l Institut Élie Cartan, 2005/05 (zu finden unter: www.iecn.u-nancy.fr/Preprint).

[Sch2] L. Schäfer: tt^* geometry and pluriharmonic maps. Prépublication de'l Institut Élie Cartan, 2005/25.

[Si1] C.T. Simpson: Constructing variations of Hodge structure using Yang–Mills theory and applications to uniformization. Journal of the A.M.S. **1** (1988), 867–918.

[Si2] C.T. Simpson: Nonabelian Hodge theory. Proceedings of the ICM Kyoto, Japan, 1990, 747–756.

[Si3] C.T. Simpson: Higgs bundles and local systems. Publ. Math. I.H.E.S. **75** (1992), 5–95.

[Si4] C.T. Simpson: Harmonic bundles on nonconpact curves. Journal of the A.M.S. **3** (1990), 713–770.

[Si5] C.T. Simpson: Mixed twistor structures. math.AG/9705006.

[UY] K.K. Uhlenbeck, S.T. Yau: On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles. Comm. Pure and Appl. Math. **39-S** (1986), 257–293.

Hinweise zu den Vortragsvorschlägen

Zu 1.: Der erste Vortrag soll an die Standardfakten zu hermiteschen Vektorbündeln erinnern, Notationen vergleichen und etablieren und Higgs-Bündel definieren.
Stichworte: M komplexe Mannigfaltigkeit,
$E \to M$ komplexes C^∞ Vektorbündel, $A^k(E) := A^k_M \otimes C^\infty(E)$, wobei
$A^k_M = \{C^\infty$ k-Formen auf $M\}$, $C^\infty(E) = \{C^\infty$-Schnitte von $E\}$,
$A^{p,q}(E)$,

$$\begin{aligned} \text{Zusammenhang } D : A^0(E) &\to A^1(E), ... \\ \text{seine äußeren Ableitungen } \mathrm{d}_D^{(k)} : A^k(E) &\to A^{k+1}(E), \\ \omega \otimes a &\mapsto \mathrm{d}\omega \otimes a + (-1)^k \omega \wedge Da. \end{aligned}$$

$(1,0)$-Zusammenhang $D' : A^0(E) \to A^{1,0}(E)$, $\mathrm{d}_{D'}^{(k)}$, $(0,1)$-Zusammenhang D'', $C^\infty(M)$-lineare Abbildung $\theta : A^0(E) \to A^{1,0}(E)$, ebenso $\overline{\theta} : A^0(E) \to A^{0,1}(E)$.

Vergleich von Notationen: häufig alle $\mathrm{d}_D^{(k)} =: D$, insbesondere ist die Krümmung

$$d_D^{(1)} \circ D = D^2 : A^0(E) \to A^2(E);$$

sie ist $C^\infty(M)$-linear, also ein Tensor. Analog

$$\begin{aligned} \theta^2 = \theta \wedge \theta = \frac{1}{2}[\theta, \theta] = d_\theta^{(1)} \circ \theta : A^0(E) \to A^2(E), \\ D(\theta) = d_D^{(1)} \circ \theta + d_\theta^{(1)} \circ D = D \circ \theta + \theta \circ D : A^0(E) \to A^2(E) \end{aligned}$$

(kovariante Ableitung des Tensors θ).

Nun sei eine hermitesche Metrik K auf E gegeben. Definition unitärer Zusammenhang ...
Lemma 1:

(i) Zu jedem $(0,1)$-Zusammenhang D'' gibt es genau einen $(1,0)$-Zusammenhang D' , so daß $D' + D''$ ein unitärer Zusammenhang ist.
(ii) $D''^2 = 0 \iff D'^2 = 0$; dann ist $D' + D''$ der *Chern-Zusammenhang* zu D''. Seine Krümmung ist eine Endomorphismen-wertige $(1,1)$-Form.

Satz 2: (Newlander-Nirenberg, Koszul-Malgrange (?)) (nur zitieren)

$$D''^2 = 0 \iff D'' \text{ definiert eine holomorphe Struktur auf } E.$$

Definition 3: Ein *Higgs-Bündel* (mit Higgs-Feld θ) ist ein Vektorbündel $(E \to M, D'', \theta)$ mit $(D'' + \theta)^2 = 0$,
also $D''^2 = 0$, $\Rightarrow$ holomorphe Struktur auf E,
$D''(\theta) = 0$, $\Rightarrow$ θ ist eine holomorphe Endomorphismen-wertige 1-Form,
$\theta^2 = 0$, $\Rightarrow \theta_X \circ \theta_Y = 0$ für hol. Vektorfelder X, Y auf M.

Literatur dazu: viele Quellen, z.B. Kobayashi, Griffiths–Harris, Donaldson–Kronheimer, [CMSP].

Zu 2.: Der zweite Vortrag soll die “lineare Algebra” von harmonischen Bündeln diskutieren und am Ende die Korrespondenzen präzise formulieren.
Literatur zur linearen Algebra: [Si3, Seite 13], [Mo3, 2.5.3 und 2.5.5];
Literatur zu den Korrespondenzen: [Si1][Si2][Si3], [Co].
Gegeben sei $E \to M$ wie oben. Um Simpsons Notationen zu folgen, wird das Symbol ∂ nicht nur in $\mathrm{d} = \partial + \overline{\partial}$, sondern auch für einen $(1,0)$-Zusammenhang auf E benutzt [manchmal besteht Verwechslungsgefahr, z.B. in Proposition 6]; analog $\overline{\partial}$.

Definition 4: Ein *harmonisches Bündel* besteht aus den Daten $(E \to M, D = \partial + \overline{\partial} + \theta + \overline{\theta})$ mit den Eigenschaften:
$\overline{\theta} : A^0(E) \to A^{0,1}(E)$ ist $C^\infty(M)$-linear (wie θ), $D^2 = 0$ (d.h D ist ein flacher Zusammenhang), $(\overline{\partial} + \theta)^2 = 0$ (d.h. $(E \to M, \overline{\partial}, \theta)$ ist ein Higgs-Bündel)
[Vorsicht: $D'' := \overline{\partial} + \overline{\theta}$ und $\overline{\partial}$ definieren i.a. verschiedene holomorphe Strukturen auf E],
es gibt eine hermitesche Metrik K auf E, so daß $\partial + \overline{\partial}$ unitär ist und $\overline{\theta}$ adjungiert zu θ ist. Eine solche Metrik heißt dann *harmonisch*.
[Vorsicht: eine solche Metrik selber ist nicht Teil der Daten eines harmonischen Bündels; aber meistens werden harmonische Bündel mit einer festen harmonischen Metrik betrachtet.]

1. Zugang, von einem Higgs-Bündel aus: Sei $(E \to M, \overline{\partial}, \theta)$ ein Higgs-Bündel und K irgendeine hermitesche Metrik auf E.
$\exists!\ \overline{\theta}$, das adjungiert zu θ ist.
$\exists!\ \overline{\partial}$, so daß $\partial + \overline{\partial}$ unitär ist. Dann gelten

$$\overline{\partial}^2 = 0,\ \overline{\partial}(\theta) = 0,\ \theta^2 = 0,\ \partial^2 = 0,\ \partial(\overline{\theta}) = 0,\ \overline{\theta}^2 = 0.$$

Für ein harmonisches Bündel bräuchte man zusätzlich

$$\partial(\theta) = 0, (\text{äq.:})\ \overline{\partial}(\overline{\theta}) = 0,\ \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial + [\theta, \overline{\theta}] = 0.$$

2. Zugang, von einem flachen Bündel aus: Sei $(E \to M, K, D = D' + D'')$ ein flaches Bündel mit irgendeiner hermiteschen Metrik K.
Es gibt eindeutige δ' und δ'' ($(1,0)$-Zushg. und $(0,1)$-Zushg:), so daß $\delta' + D''$ und $D' + \delta''$ unitäre Zusammenhänge sind.

$$\partial := \frac{1}{2}(D' + \delta'),\ \overline{\partial} := \frac{1}{2}(D'' + \delta''),\ \theta := \frac{1}{2}(D' - \delta'),\ \overline{\theta} := \frac{1}{2}(D'' - \delta'').$$

Lemma 5:([Mo3, 2.5.3], [Si3, Seite 13]

(a) $\partial + \overline{\partial}$ ist unitär, $\overline{\theta}$ ist adjungiert zu θ.
(b) $D = \partial + \overline{\partial} + \theta + \overline{\theta}$ flach impliziert

$$\begin{aligned} &\partial(\theta) = 0,\ \overline{\partial}(\overline{\theta}) = 0,\ \partial(\overline{\theta}) + \overline{\partial}(\theta) = 0, \\ &\partial^2 + \theta^2 = 0,\ \overline{\partial}^2 + \overline{\theta}^2 = 0,\ \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial + [\theta, \overline{\theta}] = 0. \end{aligned}$$

(c) Für ein harmonisches Bündel bräuchte man noch

$$\begin{aligned} &\partial^2 = 0,\ \overline{\partial}^2 = 0,\ \theta^2 = 0,\ \overline{\theta}^2 = 0 \quad \text{(alle 4 sind äquivalent)}, \\ &\overline{\partial}(\theta) = 0, \text{(äq.:)}\ \partial(\overline{\theta}) = 0. \end{aligned}$$

Beweis ausführen.

Proposition 6: ([Mo3, Lemma 2.30 in 2.5.5], [Co, Beweis von Theorem 5.1])

$$\begin{aligned} &(a) \quad \partial\overline{\partial} < \theta, \theta >= \partial < \overline{\partial}(\theta), \theta >= -2 < \theta^2, \theta^2 > + < \overline{\partial}(\theta), \overline{\partial}(\theta) > . \\ &(b) \quad \text{Also: } \overline{\partial}(\theta) = 0 \Rightarrow \theta^2 = 0. \end{aligned}$$

(Def. von $< ., . >$ in [Mo3, 2.5.5], [Co, vor Thm 5.1])
Beweis ausführen.

Das **Hauptresultat** des Seminars, die beiden Korrespondenzen, soll formuliert werden, und alle Begriffe sollen erklärt werden (außer $\deg \mathcal{F}$ für $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(E)$ eine kohärente Untergarbe; das erst im 8. Vortrag, [Si3, Seite 877]). Im Hauptresultat ist wichtig, daß man die harmonische Metrik beim harmonischen Bündel nicht fixiert hat.

Zu 3.: Literatur: Kapitel 14.1 und 14.2 in [CMSP].
Die am besten ganz behandeln.
Nur die Sätze von Eells–Sampson (Satz 14.1.5) und Sampson (Satz 14.2.4) eher ohne Beweis-Andeutungen. Aber manches andere genauer hinschreiben und besser begründen als in [CMSP].
[Vorsicht: auf Seite 360 ist $\nabla : A^0(f^*(T_N)) \to A^1(f^*(T_N))$ der durch ∇^N induzierte Zusammenhang. In Problem 14.1.1 (ii) heisst es ∇^N statt ∇^M. Die zweite Formel in Kapitel 14.2 ist nicht korrekt.]

Bemerkung 7: Für $f : M \to N$ harmonisch braucht man eine (reelle) Metrik auf M. Für $f : M \to N$ pluriharmonisch mit M eine komplexe Mannigfaltigkeit braucht man überhaupt keine Metrik auf M. Das spiegelt sich auch in den infinitesimalen Charakterisierungen wider: Bei $\nabla^* \mathrm{d} f = 0$ geht die Metrik via $*$ ein; bei $\nabla \mathrm{d}^c f = 0$ ist keine Metrik nötig.

Zu 4.: Der vierte Vortrag gibt zwei schöne Sätze, die die Beziehung zwischen harmonischen Bündeln (bzw. Kandidaten dafür) und gewissen (pluri)harmonischen Abbildungen (bzw. Kandidaten dafür) aufzeigen.
Die Sätze 8 und 9 sind makellos und rund. Aber es gibt keine ideale Vorlage für die Beweise. Am besten hält jemand den Vortrag, der mit der Differentialgeometrie von symmetrischen Räumen Erfahrung hat und sich selbst Beweise zurechtlegen kann.
Literatur: [Co, die Seiten 375 unten und 376 oben] für Satz 8, aber viel zu knapp; auch [Si3, die Seiten 15 und 16] für Satz 8, aber mit etwas anderen Objekten; [Sch1][Sch2] für Satz 9, präzis, aber mit großem Umweg.

$$\begin{aligned} \mathrm{Herm}(n) &:= \{\text{positiv definite hermitesche Matrizen}\} \\ &\cong GL(n,\mathbb{C})/U(n) \quad \text{homogener und symmetrischer Raum,} \\ g\cdot g^* &\leftarrow g, \\ gl(n,\mathbb{C}) &= \mathbf{k}+\mathbf{p} = \{\text{schiefhermitesche M.}\} \oplus \{\text{hermitesche M.}\}, \end{aligned}$$

Die Metrik auf $\mathbf{p}$ mit $(A,B) \mapsto tr(AB)$ ist $U(n)$-invariant und induziert eine $GL(n,\mathbb{C})$-invariante Riemannsche Metrik auf $\mathrm{Herm}(n)$.

Situation: 2. Zugang im 2. Vortrag, $(\pi : E \to M, K, D)$ ein flaches Vektorbündel vom Rang n mit einer hermiteschen Metrik K.
$\widetilde{M} :=$ universelle Überlagerung von M;
$v = (v_1, ..., v_n)$ eine D-flache Basis von $\pi^* E \to \widetilde{M}$; für $t \in \widetilde{M}$ sei

$$\begin{aligned} f : \widetilde{M} &\to \mathrm{Herm}(n), \\ t &\mapsto (K(v_i(t), v_j(t))) \in \mathrm{Herm}(n). \end{aligned}$$

Für eigene Beweise von Satz 8 und Satz 9 ist es bestimmt nötig, eine genaue Beziehung zwischen $\mathrm{d}f$ (bzw $f^{-1}\mathrm{d}f$, $f^{-1}\partial f$) und θ und $\overline{\theta}$ herzustellen; eine Version: [Mo3, 2.5.4].

Satz 8: ([Co, Seite 376 oben]) Sei zusätzlich M Kähler mit Kählermetrik ω und $\Lambda = (\omega\wedge)^*$.

$$f \text{ ist harmonisch} \iff \Lambda(\overline{\partial}(\theta)) = 0 \text{ (d.h. } \overline{\partial}(\theta) \text{ ist primitiv).}$$

Kritik an [Co]: Die untersten 3 Zeilen auf Seite 375 sind eine viel zu kurze kryptische Begründung für

$$f \text{ harmonisch} \iff (\partial + \overline{\partial})^*(\theta + \overline{\theta}) = 0;$$

denn die Ähnlichkeit mit [CMSP, Seite 360] $\nabla^* \mathrm{d}f = 0$ ist a priori nur formal. Dagegen ist die Rechnung auf Seite 376 oben eine viel zu umständliche Begründung für

$$(\partial + \overline{\partial})^*(\theta + \overline{\theta}) = 2\partial^*(\theta).$$

Denn das folgt sofort aus den Kähleridentitäten (Seite 375 unten, [Si3, Seite 15 oben], [Si1, Seite 876] mit Beweis) und aus $\overline{\partial}(\theta) + \partial(\overline{\theta}) = 0$ (Lemma 5 (b)).

Satz 9: ([Sch1][Sch2])

$$\begin{aligned} & f \text{ ist pluriharmonisch} \\ \iff\ & (E \to M, K, D) \text{ ist ein harmonisches Bündel mit Metrik} \\ \iff\ & \overline{\partial}(\theta) = 0 \quad \text{(mit Prop. 6(b) und Lemma 5(c)).} \end{aligned}$$

Bemerkung zu [Sch1][Sch2]: Der Beweis dort geht Umwege, denn:

(i) Er läuft über eine andere etwas reichere Struktur, *metrisches tt*-Bündel*.

(ii) Er benutzt eine totalgeodätische Einbettung (eine Cartan-Immersion)

$$GL(n, \mathbb{C})/U(n) \cong \mathrm{Herm}(n) \hookrightarrow GL(n, \mathbb{C});$$

das ist allerdings instruktiv und präzise aufgeschrieben, mit guten Referenzen; bloß langwierig.

(iii) Proposition 6 (b) erlaubt $\overline{\partial}(\theta) = 0 \Rightarrow \theta^2 = 0$ zu schließen, ohne dazu die Beziehung von θ mit $f^{-1}\mathrm{d}f$ und dann die Krümmung von $GL(n, \mathbb{C})/U(n)$ zu benutzen (wie es in [Sch2] und auch in [CMSP, Seite 366] gemacht wird).

Es sollte möglich sein, mit einem Mittelweg zwischen [Co] und [Sch1][Sch2] direkt

$$f \text{ ist pluriharmonisch} \iff \overline{\partial}(\theta) = 0$$

herzuleiten.

Zu 5.: Die Konstruktion von harmonischen Metriken bei beiden Korrespondenzen vollzieht sich in zwei Schritten:

(1) Mit einer nichtlinearen Wärmeleitungsgleichung und viel Differentialgeometrie und (Funktional)Analysis wird eine Hermite-Einstein-Metrik (= hermitesche Yang-Mills-Metrik) konstruiert ([Si1, §§3–7] und [Co, §4]; Vorträge 6–10).

(2) Beim 1. Zugang (ausgehend von einem Higgs-Bündel) braucht man dann die Zusatzannahme, daß $c_1(E) = 0$ und $c_2(E) = 0$ ist. Aus ihr folgt dann, daß die konstruierte Metrik eine harmonische Metrik ist

(erste Version des Arguments in [Lu]; vgl. [Si3, Seite 16], [Si1, Seite 878]).

Beim 2. Zugang folgt mit Proposition 6 (a) und einer Integration über die kompakte Kählermannigfaltigkeit M direkt, daß die konstruierte Metrik harmonisch ist (erste Version des Arguments = Sius Bochner-Formel; vgl. auch [Sa]; Proposition 6 (a) = Corlettes Bochner-Formel, vgl. für die Integration [Mo3, Seiten 15+16]).

Im fünften Vortrag soll der zweite Schritt erläutert werden. Danach soll über die klassischen Arbeiten zu Hermite-Einstein-Metriken berichtet werden (vielleicht gibt das zusammen auch 2 Vorträge): [ES], [NS], [Do1], [UY], [Do2], [Hi], [Si1], [Do3], [Co]).

Zu 6.+7.: [Co, §4]. Natürlich kann man nicht alle Details erläutern. Es ist auch einige Übersetzungsarbeit zu leisten.

Zu 8.-10.: [Si3, SS4–7]: Der Beweis ist allgemeiner als nötig, da er auch nichtkompakte Fälle umfaßt. Technische Schwierigkeiten und Lösungen für diese Fälle können wir ignorieren. Simpson bemerkt auf Seite 889, daß der kompakte Fall genau wie in [Do1] abläuft. Vielleicht ist es gut, [Do1] heranzuziehen.
Eine **Alternative** zu **8.-10.**: [DK, 6.1+6.2]; das gibt nur einen Spezialfall; aber die Argumente sind im wesentlichen die gleichen, und die Quelle ist wohl zugänglicher.

Zu 11.: Ein bißchen Material ist in [Si3], hauptsächlich spätere (hier nicht zitierte) Arbeiten von Simpson; vgl. auch [CMSP, 14.3].

Zu 12.+13.: [Si4], [Bi], [Mo1], [Mo2], [Mo3], [Mo4].

Zu 14.: [Sab], [Mo2].