AG Mannheim-Heidelberg SS 2010

$\mathcal{D}$-Moduln, verschwindende Zykeln und gemischte Hodge-Moduln

Einführung

Das Ziel der AG, welche sich möglicherweise über 2 Semester erstrecken wird, ist, es den Formalismus der *gemischten Hodge-Moduln* von Morihiko Saito zu erarbeiten. Als Ziel könnte man sich den analytischen Beweis des Zerlegungssatzes für direkte Bilder und auch den Satz, dass die (Hyper)Kohomologie eines (gemischten) Hodge-Moduls eine (gemischte) Hodge-Struktur trägt, vornehmen.
Im ersten Teil wollen wir die relevanten Grundlagen über $\mathcal{D}$-Moduln, perverse Garben und verschwindende Zykeln behandeln. Die Einteilung unten ist ein grober Vorschlag, jedes Thema sollte in ein, zwei oder höchsten drei Vorträgen behandelt werden.
Ein Vorschlag für die Literatur ist bei jedem Vortrag dabei, außer den genannten Quellen sind auch noch die folgenden Referenzen interessant: [BBD82], [dCM05] und [dCM09]. In der häufig genannten Referenz [Dim04] sind oft Resultate nicht bewiesen, sondern es wird auf weitere Quellen verwiesen.
Für den zweiten Teil der AG, welcher sich dann tatsächlich mit (gemischten) Hodge-Moduln befassen soll, kann man unter anderem die folgenden Texte anschauen: [Sai89], [Sab07], [Sab08] und natürlich die Orginalarbeiten [Sai88] und [Sai86].

1 Analytische $\mathcal{D}$-moduln (2-3 Vorträge)

In diesen Vorträgen sollen die Standardbegriffe und -ergebnisse der Theorie der analytischen $\mathcal{D}$-Moduln behandelt werden. Als Referenzen bieten sich z.B. [PS08, 13.3, 13.4, 13.6.] oder [GM93] an, aber natürlich gibt es auch viele andere Quellen, z.B. die Klassiker [Pha79] oder [Bjö93].

1.1 Kohärenz, charakteristische Varietät

Hier sollen für eine komplexe Mannigfaltigkeit die Garbe $\mathcal{D}_X$ definiert werden, sowie die folgenden Begriffe erklärt werden:

1. kohärente Links- und Rechts-$\mathcal{D}_X$-Moduln ([PS08, 13.4] oder [GM93, II.1. und II.2]), sowie kurz die Rechts/Links-Transferformeln (siehe, z.B., [PS08, 13.3.2] oder [MS02, 1.2.9 bis 1.2.11.]), Relation $\mathcal{D}_X$-Moduln $\Leftrightarrow$ flache Zusammenhänge (z.B. [GM93, IV.2, lemma 6]).

2. gute Filtrierungen und charakteristische Varietät(siehe [PS08, 13.4.2] oder [GM93, II.2 und Kapitel III]), Involutivität der charakteristischen Varietät, ohne Beweis, Verweis auf Gabber ([Bjö93, A:III.3] oder [GM93, Anhang]).

3. holonome $\mathcal{D}_X$-Moduln (siehe [PS08, 13.6.1 und 13.6.2])

1.2 de Rham-Komplex, Kashiwaras Konstruierbarkeitssatz

Es soll der de Rham-Komplex eines $\mathcal{D}_X$-Moduls erläutert werden, vielleicht auch der Lösungskomplex (Referenzen: [Mal93, Kapitel I] und [CJ93, 1.2 und 1.3]), sowie der Satz von Kashiwara, dass der de Rham-Komplex eines holonomen $\mathcal{D}_X$-Moduls konstruierbare Kohomologie hat. Die Beweisidee kann man aus [Bjö93, Theorem 3.3.1] herausziehen.

1.3 Standardfunktoren: inverses Bild, direktes Bild, Dualität

Hier sollen für eine holomorphe Abbildungen $f : X \to Y$ die Funktoren $f_+ : \mathcal{D}^b(\mathcal{D}_X) \to \mathcal{D}^b(\mathcal{D}_Y)$ sowie $f^+ : \mathcal{D}^b(\mathcal{D}_Y) \to \mathcal{D}^b(\mathcal{D}_X)$ erläutert werden ([PS08, 13.3.4] oder [MS02, 2.1 und 2.2]), eventuell auch die Varianten mit kompaktem Support $f_\dagger : \mathcal{D}^b(\mathcal{D}_X) \to \mathcal{D}^b(\mathcal{D}_Y)$ und $f^\dagger : \mathcal{D}^b(\mathcal{D}_Y) \to \mathcal{D}^b(\mathcal{D}_X)$ (Achtung, diese werden in [PS08] mit $f_!$ bzw. $f^!$ bezeichnet). Desweiteren soll der Dualitätsfunktor für $\mathcal{D}_X$-Moduln eingeführt ([PS08, S. 317], [Dim04, S. 143] und [Bjö93, II.11]) und die Formeln ([Bjö93, Theorem 2.11.3 und 2.11.8]) für eigentliche holomorphe Abbildungen diskutiert werden. Man sollte insbesondere für das direkte Bild einige Beispiele berechnen, z.B. das Gauß-Manin-System einer holomorphen Abbildung (siehe z.B., [MS02, exercise 2.2.1 und Abschnitt 2.5]). Bemerkung: Für diesen Vortrag muss man natürlich schon in den entsprechenden abgeleiteten Kategorien arbeiten, obwohl diese erst im nächsten Vortrag noch einmal ausführlicher behandelt werden.

2 Perverse Garben (2-3 Vorträge)

2.1 Abgeleitete und triangulierte Kategorien, t-Strukturen

Hier sollen noch einmal kurz die Definitionen und Eigenschaften von abelschen, abgeleiteten und allgemeiner triangulierten Kategorien dargestellt werden, etwa der Stoff in [Dim04, 1.3]. Insbesondere soll auf t-Strukturen eingegangen werden, siehe [Dim04, Kapitel 5.1].

2.2 Konstruierbare Garben und Verdier Dualität

Zunächst soll kurz der Begriff eines Komplexes mit konstruierbarer Kohomologie wiederholt werde (siehe [PS08, 13.2.2] und [Dim04, 4.1]). Dann soll der dualisierende Komplex und eine Version der Verdier-Dualität eingeführt werden, sowie die Funktoren $f^!$ und $f_!$. Hierbei kann man sich auf den relevanten Fall von konstruierbaren Garben auf analytischen Räumen beschränken. Mögliche Quellen sind [PS08, 13.1] oder [Dim04, 3.2].

2.3 Perverse Garben, der Schnittkomplex

Es sollen perverse Garben (nur für die mittlere Perversitätsfunktion) definiert werden, und zwar möglichst sowohl die Beschreibung mit Hilfe der Funktoren i^{-1} und $i^!$ (siehe [Dim04, Definition 5.1.1]) als auch die Charakterisierung mit Hilfe der Support- und Kosupportbedingung ([Dim04, Proposition 5.1.16.]) Als wichtigstes Beispiel von perversen Garben soll der Schnittkomplex eingeführt werden ([PS08, 13.2.1]). Im algebraischen Fall soll auch die Charakterisierung als mittleren Erweiterung eines lokalen Systems auf einer offenen Teilmenge dargestellt werden ([Dim04, 5.4.1] oder [PS08, Theorem 13.19 und Proposition 13.24]).

2.4 Riemann-Hilbert-Korrespondenz

Hier soll die allgemeine Form der Riemann-Hilbert-Korrespondenz als Äquivalenz von triangulierten Kategorien mit t-Strukturen formuliert werden. Als Quellen bieten sich [Dim04, 5.3], [PS08, 13.6.3] (nur für den algebraischen Fall), oder [Bjö93, V.5.] an. Um die Riemann-Hilbert-Korrespondenz formulieren zu können, muss man eine der möglichen Definitionen von Regularität einführen (z.B. [PS08, Definition 13.62] oder [Dim04, S. 144] oder [Pha79, 11.9] oder [Bjö93, Kapitel 5, insbesondere Definition 5.3.1]).

3 Verschwindungszykeln (2-3 Vorträge)

3.1 Die Funktoren ψ_f und ϕ_f für Garben

Für einen beliebigen komplexen Raum X, eine holomorphe Funktion f auf X und einen Komplex $\mathcal{K}^\bullet$ von konstruierbaren Garben auf X sollen die zwei Funktoren ψ_f und φ_f definiert werden, man kann [PS08, 11.2.4 und 13.2.3] oder [Dim04, 4.2] folgen (oder natürlich auch in die Originalquelle [SGA73] hineinschauen).
Als wichtiges Ergebniss sollte der Satz von Gabber, dass für eine perverse Garbe $\mathcal{F}^\bullet$ die Garben $\psi_f\mathcal{F}^\bullet$ und $\phi_f\mathcal{F}^\bullet$ (bis auf Shift) auf $f^{-1}(0)$ pervers sind, erwähnt werden. Für den Beweis kann man [Bry86, Théorème 1.2] konsultieren.

3.2 Kashiwara-Malgrange-Filtrierung, Bernstein-Polynom

Für die Funktoren ψ_f und ϕ_f gibt es Entsprechungen auf der $\mathcal{D}$-Modul-Seite, diese benutzen die V-Filtrierung. In diesem Vortrag soll daher allgemein für einen kohärenten $\mathcal{D}_X$-Modul die V-filtrierung erklärt werden, etwa in den folgenden Schritten:

1. Filtrierung $V_\bullet$ auf $\mathcal{D}_X$,
2. gute V-Filtrierungen auf kohärenten $\mathcal{D}_X$-Moduln
3. Bernsteins Funktionalgleichung und spezialisierbare $\mathcal{D}_X$-Moduln
4. holonome Moduln sind spezialisierbar

Hierbei kann man [MM04, Kapitel 4] oder [MS02, Kapitel 5] (bei diesen beiden Quellen gibt es Überschneidungen) folgen.

3.3 Vergleichsatz für Verschwindungszykeln

Hier soll erläutert werden, dass sich die analytische und die topologische Definition der Funktoren ψ_f und ϕ_f unter dem de Rham-Funktor entsprechen ([MM04, Kapitel 5]).
Zur Illustration kann man hier (oder auch schon vorher) einiges zur Klassifikation von (Keimen am Ursprung von) perversen Garben auf $\mathbb{C}$ (bzw. regulär holonomen $\mathcal{D}_{\mathbb{C},0}$-Moduln) sagen, siehe [Dim04, S. 140-142 und S.148-153] oder auch [Mal91, II.2].

4 Filtrierte $\mathcal{D}$-Moduln (1 Vortrag)

Für die Definition polarisierbaren oder sogar gemischten Hodge-Moduln muß man die Kategorie der regulär holonomen Moduln verfeinern, indem man eine festgewählte, gute Filtrierung mit als Teil der Daten betrachtet. Dies erfordert einige Veränderungen an der Theorie, welche in diesem Vortrag behandelt werden sollen. Insbesondere geht es um den de Rham-Komplex eines filtrierten $\mathcal{D}$-Moduls sowie um die Funktoren ψ_f und ϕ_f in der Kategorie der filtrierten $\mathcal{D}$-Moduln. Mögliche Quellen sind: [PS08, 13.5], [Sab07, 4.1-4.3] oder auch [MS02, Kapitel 5].
Als Anwendung und Motivation für den 2. Teil könnte man hier die Definition eines polarisierbaren Hodge-Moduls auf einer Kurve vortragen ([Sab07, 2.3]).

Literatur

[BBD82] A. A. Beĭlinson, J. Bernstein, and P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), Astérisque, vol. 100, Soc. Math. France, Paris, 1982, pp. 5–171.

[Bjö93] Jan-Erik Björk, *Analytic $\mathcal{D}$-modules and applications*, Mathematics and its Applications, vol. 247, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[Bry86] Jean-Luc Brylinski, *Transformations canoniques, dualité projective, théorie de Lefschetz, transformations de Fourier et sommes trigonométriques*, Astérisque (1986), no. 140-141, 3–134, 251, Géométrie et analyse microlocales.

[CJ93] Francisco J. Castro-Jiménez, *Exercices sur le complexe de de Rham et l'image directe des $\mathcal{D}$-modules*, Éléments de la théorie des systèmes différentiels. Images directes et constructibilité (Nice, 1990), Travaux en Cours, vol. 46, Hermann, Paris, 1993, pp. 15–45.

[dCM05] Mark Andrea A. de Cataldo and Luca Migliorini, *The Hodge theory of algebraic maps*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **38** (2005), no. 5, 693–750.

[dCM09] ———, *The decomposition theorem, perverse sheaves and the topology of algebraic maps*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **46** (2009), no. 4, 535–633.

[Dim04] Alexandru Dimca, *Sheaves in topology*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[GM93] Michel Granger and Philippe Maisonobe, *A basic course on differential modules*, Éléments de la théorie des systèmes différentiels. $\mathcal{D}$-modules cohérents et holonomes (Nice, 1990), Travaux en Cours, vol. 45, Hermann, Paris, 1993, pp. 103–168.

[Mal91] B. Malgrange, *Équations différentielles à coefficients polynomiaux*, Progress in Mathematics, vol. 96, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1991.

[Mal93] Bernard Malgrange, *De Rham complex and direct images of $\mathcal{D}$-modules*, Éléments de la théorie des systèmes différentiels. Images directes et constructibilité (Nice, 1990), Travaux en Cours, vol. 46, Hermann, Paris, 1993, pp. 1–13.

[MM04] Philippe Maisonobe and Zoghman Mebkhout, *Le théorème de comparaison pour les cycles évanescents*, Éléments de la théorie des systèmes différentiels géométriques (Philippe Maisonobe and Luis Narváez Macarro, eds.), Sémin. Congr., vol. 8, Soc. Math. France, Paris, 2004, Papers from the CIMPA Summer School held in Séville, September 2–13, 1996, pp. 311–389.

[MS02] Philippe Maisonobe and Claude Sabbah, *Aspects of the theory of $\mathcal{D}$-modules*, Vorlesungsausarbeitung, verfügbar unter `http://www.math.polytechnique.fr/cmat/sabbah/livres.html`, 2002.

[Pha79] Frédéric Pham, *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin*, Progress in Mathematics, vol. 2, Birkhäuser Boston, Mass., 1979, With contributions by Lo Kam Chan, Philippe Maisonobe and Jean-Étienne Rombaldi. MR MR553954 (81h:32015)

[PS08] Chris A. M. Peters and Joseph H. M. Steenbrink, *Mixed Hodge structures*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 52, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[Sab07] Claude Sabbah, *Hodge theory, singularities and $\mathcal{D}$-modules*, Vorlesungsausarbeitung, verfügbar unter `http://www.math.polytechnique.fr/cmat/sabbah/livres.html`, 2007.

[Sab08] ______, *Vanishing cycles of polynomial maps (Topology, Hodge structure, $\mathcal{D}$-modules)*, Vorlesungsausarbeitung, verfügbar unter `http://www.math.polytechnique.fr/cmat/sabbah/livres.html`, 2008.

[Sai86] Morihiko Saito, *Mixed Hodge modules*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **62** (1986), no. 9, 360–363. MR MR888148 (89g:32019)

[Sai88] ______, *Modules de Hodge polarisables*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **24** (1988), no. 6, 849–995 (1989).

[Sai89] ______, *Introduction to mixed Hodge modules*, Astérisque (1989), no. 179-180, 10, 145–162, Actes du Colloque de Théorie de Hodge (Luminy, 1987).

[SGA73] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique. II*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 340, Springer-Verlag, Berlin, 1973, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–1969 (SGA 7 II), Dirigé par P. Deligne et N. Katz.