AG Mannheim-Heidelberg WS 2010-2011

Polarisierbare und gemischte Hodge-Moduln

Einleitung

In dieser AG wollen wir den Formalismus der polarisierbaren sowie gemischten Hodge-Moduln von Morihiko Saito erarbeiten. Neben der Definition und wichtigen Eigenschaften wollen wir vor allem den Zerlegungssatz für direkte Bilder unter projektiven Abbildungen und die Version des Hard-Lefschetz-Satzes für Hodge-Moduln verstehen, und, soweit möglich, die Beweise durcharbeiten. Im folgenden ist ein Vorschlag für ein Programm, welches die wichtigsten Teile von [Sai88] abdeckt. Je nach Bedarf kann man auch noch weitere Aspekte behandeln.
Einige allgemeine Referenzen sind: Die Orginalartikel [Sai88] und [Sai90], die folgenden Übersichtsartikel von M. Saito selbst: [Sai89b], [Sai86] sowie [Sai94]. In [Shi92] findet man eine gute Zusammenfassung von [Sai88] und [Sai90], welche das Durcharbeiten der Orginalarbeiten erleichtert. Auch [Sai92], in dem Anwendungen der Theorie der polarisierbaren bzw. gemischten Hodge-Moduln besprochen werden, ist sinnvoll. Desweiteren sind die folgenden Vortragsausarbeitungen von C. Sabbah zu empfehlen: [Sab07] gibt einen Überblick über die Theorie der polarisierbaren Hodge-Moduln, ohne technische Details, [MS02] ist eine Einführung in die $\mathcal{D}$-Modul-Theorie, wobei aber auch wichtige Aspekte von Hdoge-Moduln, wie z.B. induzierte Moduln und differentielle Komplexe (Abschnitte 1.6, 1.7 und 2.3) sowie V-Filtrierungen auf filtrierten $\mathcal{D}$-Moduln (Kapitel 5) besprochen werden. Schließlich kann man [PS08, Kapitel 14] für eine erste Einführung und einen, allerdings sehr groben Überblick über Hodge-Moduln benutzen.
Die folgende Aufstellung von Vortragsvorschlägen ist noch ziemlich wenig detailliert, wahrscheinlich braucht man für jedes Thema etwa 2 Sitzungen. In jedem Fall muss man überall eine sinnvolle Auswahl treffen, und viele technische Details, insbesondere in den Beweisen, weglassen.

1 Filtrierte und induzierte $\mathcal{D}$-Modulen

In diesen Vorträgen sollen die Grundlagen der Theorie von filtrierten $\mathcal{D}$-Moduln gelegt werden, d.h. kohärenten oder holonomen $\mathcal{D}$-moduln, welche mit einer festen guten Filtrierung $F_\bullet$ versehen sind. Um die Standardfunktoren für solche Objekte zu definieren und beschreiben zu können, benutzt Saito den Formlismus der induzierten Moduln, d.h., (Rechts-) $\mathcal{D}$-moduln vom Typ $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{D}$, wobei $\mathcal{L}$ ein kohärenter $\mathcal{O}$-Modul ist. Verwandt dazu sind die sogenannten differentiellen Komplexe. Ausser in [Sai88, § 2] wird diese Theorie auch in [Sai89a] behandelt, und eine wahrscheinlich leichter lesbare Einführung ist [MS02, 1.6, 1.7 und 2.3].

2 V-Filtrierung und filtrierte $\mathcal{D}$-Moduln

Hier geht es darum, die Theorie der V-Filtrierung, die wir im letzten Semester ganz allgemein für holonome $\mathcal{D}$-Moduln behandelt haben, im Kontext der filtrierten $\mathcal{D}$-Moduln darzustellen. Zentral für einen ersten Vortrag ist der Abschnitt 3.2 in [Sai88], insbesondere die Proposition 3.2.2, welche eine Erklärung für die Bedingungen (3.2.1.2) und (3.2.1.3) liefert. Im Fall eines Moduls der Dimension 1 kann man dazu auch [Sab07, 2.2.c] konsultieren. Die Abschnitte 3.3 bis 3.6 in [Sai88] scheinen sehr technisch, sind aber sicher nicht zu vernachlässigen. Hier muss der Vortragende eine Auswahl treffen und wichtige Ergebnisse in verkürzter Form darstellen.

3 Polarisierbare Hodge-Moduln

Hier soll noch einmal genau auf die Definition eines polarisierbaren Hodge-Moduls eingegangen werden, wie sie bereits im Einführungsvortrag vorgestellt wurde. Dies umfasst Teile der Abschnitte 5.1.1 und 5.1.2 in [Sai88]. Insbesondere sollte etwas zu den Beweisen von Lemma 5.1.10, Lemma 5.1.13, und Proposition 5.1.14 in [Sai88] gesagt werden. Der Abschnitt 5.1.2 über Polarisierungen ist sehr technisch, hier muss man je nach verfügbarer Zeit ein sinnvolle Auswahl treffen.

4 Zerlegungssatz und Hard-Lefschetz-Theorem

Ziel dieses Vortrags ist die Darstellung der Aussage und von Teilen des Beweises von [Sai88, Theorem 5.3.1]. Zunächst muss der Lefschetz-Operator auf einem (Komplex von) filtrierten $\mathcal{D}$-Modul(n) erklärt werden, dies findet man auch in [PS08, 14.3.3]. Danach besteht der Beweis von [Sai88, Theorem 5.3.1] aus zwei Schritten, nämlich dem Fall, dass die Basismannigfaltigkeit positive Dimension hat, hier gehen die induktiven Bedingungen in der Definition eines Hodge-Moduls ein, sowie dem Fall eines null-dimensionalen Basisraumes, hier reicht es, den Fall eines Hodge-Moduls auf $\mathbb{P}^N$ zu betrachten. Man kann wahrscheinlich den Beweis von [Sai88, Formel 5.3.8.1] weglassen, damit es nicht zu technisch wird.

5 VPHS sind polarisierte Hodge-Moduln

Um überhaupt mit Hodge-Moduln arbeiten zu können, muss man zeigen, dass eine Variation von polarisierten Hodge-Strukturen (VPHS) ein polarisierter Hodge-Modul ist. Dies ist der Inhalt von [Sai88, Theorem 5.4.3]. Der Beweis hiervon soll in diesem Vortrag etwas diskutiert werden. Anschließend kann man die Aussagen und Folgerungen in [Sai88, 5.4.4 bis 5.4.10] besprechen.

6 Kollar-Vermutung und Kodaria Vanishing

In diesem Vortrag kann man bei Interesse weitere Anwendungen von polarisierbaren bzw. gemischten Hodge-Moduln diskutieren. Diese betreffen einerseits direkte Bilder von abstrakten VPHS (Kollar-Vermutung) sowie andererseits gewisse Verallgemeinerungen des Kodaira-

Verschwindungssatzes. Referenzen sind [Sai92, §2 und §3], [PS08, Abschnitt 14.4.4] oder [Sai94, § 5].

Literatur

[MS02] Philippe Maisonobe and Claude Sabbah, *Aspects of the theory of $\mathcal{D}$-modules*, Vorlesungsausarbeitung, verfügbar unter `http://www.math.polytechnique.fr/cmat/sabbah/livres.html`, 2002.

[PS08] Chris A. M. Peters and Joseph H. M. Steenbrink, *Mixed Hodge structures*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 52, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[Sab07] Claude Sabbah, *Hodge theory, singularities and $\mathcal{D}$-modules*, Vorlesungsausarbeitung, verfügbar unter `http://www.math.polytechnique.fr/cmat/sabbah/livres.html`, 2007.

[Sai86] Morihiko Saito, *Mixed Hodge modules*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **62** (1986), no. 9, 360–363.

[Sai88] ———, *Modules de Hodge polarisables*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **24** (1988), no. 6, 849–995 (1989).

[Sai89a] ———, *Induced $\mathcal{D}$-modules and differential complexes*, Bull. Soc. Math. France **117** (1989), no. 3, 361–387.

[Sai89b] ———, *Introduction to mixed Hodge modules*, Astérisque (1989), no. 179-180, 10, 145–162, Actes du Colloque de Théorie de Hodge (Luminy, 1987).

[Sai90] ———, *Mixed Hodge modules*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **26** (1990), no. 2, 221–333. MR 1047415 (91m:14014)

[Sai92] Masa-Hiko Saitō, *Applications of Hodge modules—Kollár conjecture and Kodaira vanishing*, in *Proceedings of a symposium held at the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto, December 2–6, 1991* [Tok92], Algebraic geometry and Hodge theory (Japanese) (Kyoto, 1991), pp. 107–124.

[Sai94] Morihiko Saito, *On the theory of mixed Hodge modules*, Selected papers on number theory, algebraic geometry, and differential geometry, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 160, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, Translated from Sūgaku, Translation edited by Katsumi Nomizu, pp. 47–61.

[Shi92] Yuji Shimizu, *An introduction to Morihiko Saito's theory of mixed Hodge modules (version* 0.5*)*, in *Proceedings of a symposium held at the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto, December 2–6, 1991* [Tok92], Algebraic geometry and Hodge theory (Japanese) (Kyoto, 1991), pp. 65–106.

[Tok92] *Daisū kikagaku to Hojji riron*, Kyoto, Kyoto University Research Institute for Mathematical Sciences, 1992, Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku No. 803 (1992).