Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

28. Mai 2009

12. Übungsblatt Zahlentheorie

Aufgabe 1: (*5 Punkte*)

a) $p = 10\,000\,019$ ist eine Primzahl. Hat die Gleichung $x^2 \equiv 9\,999 \bmod p$ ganzzahlige Lösungen?

b) Berechnen Sie das Jacobi-Symbol $\left(\frac{37}{10\,000\,015}\right)$!

c) Hat die Gleichung $x^2 \equiv 37 \bmod 10\,000\,015$ ganzzahlige Lösungen?

Aufgabe 2: (*3 Punkte*)

Für welche Primzahlen p ist 17 ein quadratischer Rest modulo p ?

Aufgabe 3: (*6 Punkte*)

a) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $x^2 \equiv 1 \bmod 105$!

b) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $x^2 \equiv 13 \bmod 2^{16} + 1$!

Aufgabe 4: (*6 Punkte*)

a) Zeigen Sie: Zu einer Primzahl $p \equiv 5 \bmod 8$ gibt es keine ganzen Zahlen x, y, so daß $x^2 + 2y^2 = p$ ist.

b) Für welche anderen Kongruenzklassen modulo acht können Sie die gleiche Behauptung beweisen?

c) Zeigen Sie: Ist $n = x^2 + 2y^2$ und $m = u^2 + 2v^2$ mit $u, v, x, y \in \mathbb{N}$, so gibt es auch $w, z \in \mathbb{N}$, so daß $nm = w^2 + 2z^2$ ist.

d) Finden Sie eine möglichst allgemeine Bedingung dafür, daß die natürliche Zahl n *nicht* in der Form $x^2 + 2y^2$ dargestellt werden kann!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 4. Juni 2009, um 15.30 Uhr