WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

14. Mai 2009

11. Übungsblatt Zahlentheorie

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß für jede ganze Zahl $m \in \mathbb{Z}$ auch $k = \frac{1}{6}(m - m^3)$ ganz ist und daß gilt

$$m = m^3 + (k+1)^3 + (k-1)^3 + (-k)^3 + (-k)^3\,!$$

b) Läßt sich jede natürliche Zahl als Summe von höchstens fünf *positiven* dritten Potenzen darstellen?

Aufgabe 2: *(7 Punkte)*

M sei eine 2×2-Matrix mit ganzzahligen Einträgen.

a) Zeigen Sie: $Q = M^T M$ ist eine symmetrische Matrix!

b) Bestimmen Sie für $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ die quadratische Form zu Q !

c) Zeigen Sie: Falls $\det M \neq 0$, ist die quadratische Form zu Q positiv definit.

d) Bestimmen Sie für den Fall $\det Q = 1$ alle ganzen Zahlen, die durch die quadratische Form zu $Q = {}^tMM$ dargestellt werden können!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Für zwei zueinander teilerfremde ganze Zahlen a, b gibt es stets ganze Zahlen c und d, so daß die Matrix $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ Determinante eins hat!

b) *Ditto* für Determinante -1.

c) Sind die quadratischen Formen zu $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ und $Q_2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ äquivalent?

d) Sind die quadratischen Formen zu Q_2 und $Q_3 = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ äquivalent?

Aufgabe 4: *(14 Punkte)*

a) $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ sei eine ganzzahlige Lösung der Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$. Konstruieren Sie daraus eine ganzzahlige Lösung (x_1, y_1) der Gleichung $x^2 - Dy^2 = 1$!

b) Bestimmen Sie eine ganzzahlige Lösung der Gleichung $x^2 - 41y^2 = 1$!

c) Der indische Mathematikers BRAHMAGUPTA (598-670), in dessen 628 erschienenen Werk *Brahmasphutasiddhanta* viele PELLsche Gleichungen vorkommen, sagte: Wer innerhalb eines Jahres eine Lösung der Gleichung $x^2 - 92y^2 = 1$ in natürlichen Zahlen findet, ist ein Mathematiker. Inzwischen sind die Zeiten härter geworden: Finden Sie bis zum Abgabeschluß dieses Übungsblatts ohne Probieren zwei solche Lösungen!

d) Interpretieren Sie Ihre Lösungen als Einheiten eines quadratischen Zahlkörpers und diskutieren Sie, soweit dies ohne Rechnung möglich ist, ob eine davon die Grundeinheit sein kann!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 28. Mai 2009, um 15.30 Uhr