

30. April 2009

9. Übungsblatt Zahlentheorie

Aufgabe 1: (6 Punkte)

- Finden Sie in $\mathbb{Q}[\sqrt{-13}]$ ein Element z , so daß für alle $q \in \mathcal{O}_{-13}$ gilt $N(z - q) > 1$!
- Finden Sie in \mathcal{O}_{-13} zwei Elemente x, y derart, daß es keine Elemente $q, r \in \mathcal{O}_{-13}$ gibt mit $x = qy + r$ und $N(r) < N(y)$!
- Könnte \mathcal{O}_{-13} bezüglich einer anderen Funktion $v: \mathcal{O}_{-13} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}_0$ ein EUKLIDISCHER Ring sein?

Aufgabe 2: (5 Punkte)

- Dividieren Sie in \mathcal{O}_{-2} die Zahl $1 + 5\sqrt{-2}$ mit Rest durch $1 - 3\sqrt{-2}$!
- Dividieren Sie in \mathcal{O}_{-3} die Zahl 2 mit Rest durch $1 + \sqrt{-3}$!
- Dividieren Sie in \mathcal{O}_2 die Zahl $1 + 5\sqrt{2}$ mit Rest durch $1 - 3\sqrt{2}$!

Aufgabe 3: (4 Punkte)

- p sei eine Primzahl. Bestimmen Sie alle Paare $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ von natürlichen Zahlen, die die Gleichung $x^2 - y^2 = p$ erfüllen!
- Finden Sie eine natürliche Zahl n derart, daß die Gleichung $x^2 - y^2 = n$ mindestens zwei verschiedene Lösungen $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ hat!

Aufgabe 4: (5 Punkte)

- Finden Sie mindestens fünf Lösungen $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ der Gleichung $x^2 - 3y^2 = 1$!
- Was können Sie über die Einheitengruppe von \mathcal{O}_3 , der Hauptordnung von $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ sagen?