

23. April 2009

8. Übungsblatt Zahlentheorie

Aufgabe 1: (5 Punkte)

- a) Stellen Sie das Element $\frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ in der Form $a + b\sqrt{2}$ dar!
- b) Welche Diskriminante hat das Element $1 + i$ aus $\mathbb{Q}[i]$?
- c) Welche Diskriminante hat das Element $\beta_D = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{D}$ aus $\mathbb{Q}[\sqrt{D}]$?

Aufgabe 2: (5 Punkte)

- a) $D = n^2$ sei eine Quadratzahl. Wir definieren auf $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ eine Ringstruktur, die die Multiplikation in den Ringen $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{D}$ nachmacht, durch

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad \text{und} \quad (a, b) \cdot (a', b') = (aa' + bb'D, ab' + a'b).$$

Zeigen Sie, daß dieser Ring kein Integritätsbereich ist!

- b) $D \in \mathbb{Z}$ sei zwar keine Quadratzahl, aber auch nicht quadratfrei. Zeigen Sie, daß der Ring $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{D}$ nicht faktoriell ist!

Aufgabe 3: (5 Punkte)

- a) In der Hauptordnung \mathcal{O}_{-3} von $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ ist $4 = 2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3})$. Zeigt dies die Nichtfaktorialität von \mathcal{O}_{-3} ? Wenn ja, warum; wenn nein, warum nicht?
- b) In der Hauptordnung \mathcal{O}_{-13} von $\mathbb{Q}[\sqrt{-13}]$ ist $14 = 2 \cdot 7 = (1 + \sqrt{-13})(1 - \sqrt{-13})$. Zeigt dies die Nichtfaktorialität von \mathcal{O}_{-13} ? Wenn ja, warum; wenn nein, warum nicht?

Aufgabe 4: (5 Punkte)

- a) Dividieren Sie in $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i$ die Zahl $3 + 4i$ mit Rest durch $1 + 2i$!
- b) Was ist der ggT von $3 + 4i$ und $1 + 2i$?
- c) Berechnen Sie in $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i$ den ggT von $17 + 4i$ und $5 - 10i$!