WOLFGANG K. SEILER
*Tel.* 2515

A5, C201

*19. März 2009*

# 5. Übungsblatt Zahlentheorie

**Aufgabe 1:** (*5 Punkte*)

Finden Sie mit dem Sieb des ERATOSTHENES ohne Computerhilfe alle Primzahlen $p$ mit $1320 \leq p \leq 1360$ !

**Aufgabe 2:** (*4 Punkte*)

*a)* Zeigen Sie mit EULERs Methode, daß jeder ungerade Primteiler $p$ von $a^{2^n} + b^{2^n}$ entweder ein gemeinsamer Teiler von $a$ und $b$ ist oder aber kongruent eins modulo $2^{n+1}$.
*Hinweis:* Überlegen Sie sich, daß für $p \nmid \operatorname{ggT}(a, b)$ mindestens einer der beiden Quotienten $a/b$ und $b/a$ in $\mathbb{F}_p$ existiert und untersuchen Sie seine Ordnung in $\mathbb{F}_p^\times$ !

*b)* Zerlegen Sie ohne Computerhilfe die Zahl $N = 2^8 + 5^8 = 390\,881$ in ihre Primfaktoren!

**Aufgabe 3:** (*2 Punkte*)

$F_n = 2^{2^n} + 1$ sei die $n$-te FERMAT-Zahl. Zeigen Sie: Für $n \geq 2$ ist $2^{(F_n-1)/2} \equiv 1 \bmod F_n$ .

**Aufgabe 4:** (*4 Punkte*)

Die $r$-te MERSENNE-Zahl ist $M_r = 2^r - 1$.

*a)* Zeigen Sie: Ist $r$ ein Teiler von $s$, so ist $M_r$ Teiler von $M_s$.

*b)* Ist $M_r$ eine Primzahl, so auch $r$.

*c)* Eine natürliche Zahl heißt *vollkommen,* wenn sie gleich der Summe aller von ihr selbst verschiedener Teiler ist. Zeigen Sie: Ist $M_p$ eine Primzahl, so ist $2^{p-1}M_p$ eine vollkommene Zahl.
*Bemerkung:* Mit Ausnahme der Zeit von 1989–1992 war seit 1952 die größte bekannte Primzahl immer eine MERSENNE-Zahl, da es für diese einen einfachen Primalitätstest gibt. Der derzeitige Rekordhalter ist $M_{43\,112\,609}$ mit knapp 13 Millionen Dezimalstellen; siehe www.mersenne.org.

**Aufgabe 5:** (*5 Punkte*)

*a)* Zeigen Sie: Ist $p$ eine Primzahl, so ist $p$ ein Teiler von $2^{p-1} - 1$.

*b)* Für jede Primzahl $p$ ist $2^{M_p-1} \equiv 1 \bmod M_p$.

*c)* Für jede Primzahl $p$ ist $2^{2^{p-1}} \equiv 2 \bmod M_p$.

*d)* Ist $p$ prim und $q$ ein Primteiler von $M_p$, so ist $q \equiv 1 \bmod 2p$.

*e)* Zeigen Sie, daß $M_{11} = 2\,047$ und $M_{23} = 8\,388\,607$ nicht prim sind und finden Sie (ohne Computerhilfe) deren Primzerlegungen!

**Abgabe** bis zum Donnerstag, dem 26. März 2009, um 15.30 Uhr