

## 2. Übungsblatt Zahlentheorie

### Aufgabe 1: (3 Punkte)

- Für zwei natürliche Zahlen  $a \geq b$  braucht man Tausend Divisionen, um  $\text{ggT}(a, b)$  nach dem EUKLIDISchen Algorithmus zu berechnen. Wie viele Dezimalstellen hat  $b$  mindestens?
- Gibt es auch Zahlen  $\tilde{a}$  und  $\tilde{b}$  mit jeweils einer Dezimalstelle mehr, so daß der EUKLIDISCHE Algorithmus genau Tausend Divisionen benötigt?

### Aufgabe 2: (3 Punkte)

Die Folge der Zahlen  $x_n$  sei definiert durch

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Finden Sie eine explizite Formel für  $x_n$ !

### Aufgabe 3: (3 Punkte)

Die rationale Zahl  $x$  erfülle die Polynomgleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{mit} \quad a_i \in \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie: Stellt man  $x$  dar als einen gekürzten Bruch, so ist dessen Nenner ein Teiler von  $a_n$ !

### Aufgabe 4: (6 Punkte)

- Ein Mathematiker möchte zur Feier seines Geburtstags die Kerzen (eine für jedes Lebensjahr) so auf ausgewählten Geburtstagstorten verteilen, daß die Anzahl auf jeder dieser Torten das Quadrat einer (festen) Primzahl  $p$  ist. Bei seinen Versuchen mit  $p = 2, 3$  und  $5$  bleiben dabei aber jeweils  $p$  Kerzen übrig. Wie alt wird er?
- Wie alt müßte er werden, bis ihm dies zum nächsten Mal passiert?
- Einige Zeit versucht er dasselbe bei der Feier zum Geburtstag eines klassischen griechischen Mathematikers. Aus Mangel an Torten kann er hier allerdings nicht mit so kleinen Primzahlen arbeiten, und versucht es deshalb mit  $p = 7$  und  $p = 11$ . Wieder bleiben jeweils  $p$  Kerzen übrig. Wann wurde der griechische Mathematiker geboren?

### Aufgabe 5: (5 Punkte)

- Stellen Sie die Verknüpfungstafeln für Addition und Multiplikation in  $\mathbb{Z}/6$  auf!
- Bestimmen Sie alle Lösungen der Kongruenzen  $4x \equiv 2 \pmod{6}$  und  $3x \equiv 2 \pmod{6}$ !
- Für welche  $a \in \mathbb{Z}/6$  hat die Gleichung  $x^2 = a$  eine Lösung? Wie viele Lösungen hat sie dann jeweils?