

19. Februar 2009

1. Übungsblatt Zahlentheorie

Aufgabe 1: (2 Punkte)

Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ist $\sqrt[n]{2}$ irrational!

Aufgabe 2: (4 Punkte)

- a) Zeigen Sie ohne Verwendung des Satzes von der eindeutigen Primzerlegung, daß das Quadrat einer natürlichen Zahl a genau dann durch drei teilbar ist, wenn dies für a selbst der Fall ist!
- b) Folgern Sie, daß $\sqrt{3}$ irrational ist!

Aufgabe 3: (4 Punkte)

- a) Zeigen Sie, daß für jede natürliche Zahl n gilt: $\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{n!}{i!} < \frac{1}{n}$!

Hinweis: Kürzen Sie die Summanden, und schätzen Sie die Summe ab durch eine geometrische Reihe!

- b) Schreiben Sie $\sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} = \frac{a_n}{n!}$ als Bruch mit Nenner $n!$, und zeigen Sie mit Hilfe von a), daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{a_n}{n!} < e < \frac{a_n + 1}{n!}$$

- c) Folgern Sie, daß $e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$ eine irrationale Zahl ist!

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Berechnen Sie die größten gemeinsamen Teiler der folgenden Zahlen und stellen Sie diese als ganzzahlige Linearkombinationen der Ausgangszahlen dar:

- a) 17 und 81 b) 15 und 1005 c) 1234 und 4321

Aufgabe 5: (4 Punkte)

In einem Studentenwohnheim leben 90 Studenten; sie kommen aus Deutschland, Italien und der Schweiz. Jeder verhält sich bezüglich seines Bierkonsums genau wie der Durchschnitt seiner Landsleute, deren Verbrauch laut www.nationmaster.com im Jahr 2002 jeweils 119 l (D), 57 l (CH) und 29 l (I) waren. Im Wohnheim wurden 9308 l getrunken. Wie viele Angehörige der einzelnen Nationen wohnten dort?