Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

16. Mai 2007

11. Übungsblatt Zahlentheorie

Aufgabe 1: (*4 Punkte*)

a) $p = 10\,000\,019$ ist eine Primzahl. Hat die Gleichung $x^2 \equiv 9\,999 \bmod p$ ganzzahlige Lösungen?

b) Berechnen Sie das Jacobi-Symbol $\left(\dfrac{9\,999}{10\,000\,017}\right)$!

Aufgabe 2: (*3 Punkte*)

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch $a_n = \left(\dfrac{n}{p}\right)$ für eine feste Primzahl p.

a) Zeigen Sie: Die Zahlen $b_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ bilden eine Nullfolge.

b) Für $m \in \mathbb{N}$ sei eine neue Folge (c_n) definiert durch $c_n = a_{nm}$. Zeigen Sie: Entweder sind alle $c_n = 0$, oder alle $c_n = a_n$ oder alle $c_n = -a_n$.

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)

a) Zeigen Sie: Für eine Primzahl p und eine nicht durch p teilbare natürliche Zahl a ist die Gleichung $x^2 \equiv a \bmod p^2$ genau dann lösbar, wenn $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie eine Zahl x_0 mit $x_0^2 \equiv a \bmod p$ und suchen Sie dazu ein x_1, so daß $x = x_0 + px_1$ die Gleichung $x^2 \equiv a \bmod p^2$ löst!

b) Verallgemeinern Sie dieses Resultat auf die Gleichung $x^2 \equiv a \bmod p^n$ für eine beliebige natürliche Zahl n !

c) Bleiben die Ergebnisse aus *a)* und *b)* noch richtig, wenn p ein Teiler von a sein darf?

Aufgabe 4: (*4 Punkte*)

a) Für welche Primzahlen p ist 17 ein quadratischer Rest modulo p ?

b) Für welche $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $x^2 \equiv 17 \bmod n$ eine ganzzahlige Lösung?
Hinweis: Sie können Aufgabe 3 auch dann benutzen, wenn Sie sie nicht bearbeitet haben.

Aufgabe 5: (*4 Punkte*)

$p = 999\,89$ ist eine Primzahl. Finden Sie alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$x^2 \equiv 222\,22 \bmod p\,!$$

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 23. Mai 2007, um 13.45 Uhr